



Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I

WS 2000/01 Blatt 11

Abgabe: Freitag, den 26.01.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 37:

Bringen Sie folgende Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 4+i & -6 & 1 & 0 & 2-i & 5+i \\ -6 & 12 & 0 & 1 & -1 & 3i \\ 10+i & -18 & 1 & -1 & 3-i & 5-2i \\ -2+i & 6 & 1 & 1 & 1-i & 5-i \end{pmatrix} \in M(4 \times 6, \mathbb{C})$$

Aufgabe 38:

Für ein Polynom $f \in \mathbb{F}_2[x]$ ist

$$(f) := \{g \cdot f \mid g \in \mathbb{F}_2[x]\}$$

ein Ideal in $\mathbb{F}_2[x]$. Betrachten Sie den Faktorring

$$R := \mathbb{F}_2[x]/(f)$$

für

- (a) $f = x^2 + x + 1$,
- (b) $f = x^2 + 1$.

Beantworten Sie für (a) und (b) folgende Fragen (mit Begründung!):

- (i) Welche Charakteristik hat R ?
- (ii) Wie viele Elemente enthält R ?
- (iii) Ist R ein Körper?

Bestimmen Sie für beide Fälle die Verknüpfungstabellen von R bzgl. $+$ und $\cdot$.

Aufgabe 39:

Sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der durch die Vektoren

$$\begin{aligned} w_1 &= (8, -12, 2, 0) \\ w_2 &= (-18, 36, 0, 3) \\ w_3 &= (-2, 6, 1, 1) \end{aligned}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie Basen von U und $\mathbb{R}^4/U$.

Bitte wenden!

Aufgabe 40:

Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt **symmetrisch**, falls ${}^tA = A$.

- (i) Zeigen Sie, daß die symmetrischen Matrizen einen Untervektorraum $\text{Sym}(n, K)$ von $M(n \times n, K)$ bilden. Geben Sie die Dimension und eine Basis von $\text{Sym}(n, K)$ an.

Ist $\text{char}(K) \neq 2$, so heißt $A \in M(n \times n, K)$ **schiefssymmetrisch** (oder **alternierend**), falls ${}^tA = -A$. Im folgenden sei stets $\text{char}(K) \neq 2$.

- (ii) Zeigen Sie, daß die alternierenden Matrizen einen Untervektorraum $\text{Alt}(n, K)$ von $M(n \times n, K)$ bilden. Bestimmen Sie auch für $\text{Alt}(n, K)$ die Dimension und eine Basis.
- (iii) Für $A \in M(n \times n, K)$ sei $A_s := \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ und $A_a := \frac{1}{2}(A - {}^tA)$. Zeigen Sie: A_s ist symmetrisch, A_a ist alternierend, und es gilt $A = A_s + A_a$.
- (iv) Zeigen Sie: $M(n \times n, K) = \text{Sym}(n, K) \oplus \text{Alt}(n, K)$.

Maple-Aufgabe M2:

- (i) Studieren Sie die Hilfe der Maple-Funktionen `array`, `linalg[rowdim]`, `linalg[coldim]`.
- (ii) Schreiben Sie eine Prozedur in Maple, die bei Eingabe einer $m \times n$ -Matrix diese auf Zeilenstufenform bringt und ausgibt.