



Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I

WS 2000/01 Blatt 10

Abgabe: Freitag, den 19.01.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 33:

Gegeben seien folgende Teilmengen des $\mathbb{Q}$ -Vektorraums $V = \mathbb{Q}^4$:

$$\begin{aligned}U_1 &= \{(x, x+1, x+2, x+4) \mid x \in \mathbb{Q}\} \\U_2 &= \{(x, 2x, 3x, 4x) \mid x \in \mathbb{Q}\} \\U_3 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}, x_3 = x_1 + x_2, x_4 = x_2 + x_3\} \\U_4 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}, x_2 \geq 0\} \\U_5 &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Welche dieser Mengen sind Untervektorräume von V ? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 34:

(i) Berechnen Sie die Linearkombination $\sum \lambda_i v_i$ der Vektoren $v_i \in V$ für:

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^4$

$$v_1 = (3, -1, 2, 0), v_2 = (1, 3, -1, 6), v_3 = (8, 0, -2, 6)$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = \frac{1}{5}$$

(b) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^3$

$$v_1 = (1+i, 1, -i), v_2 = (2, 0, i), v_3 = (-3+i, -i, 1)$$

$$\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = -i, \lambda_3 = i$$

(ii) Sei $\mathbb{F}_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +, \cdot)$ der Körper mit zwei Elementen und $V = \mathbb{F}_2^4$.

Zeigen Sie, daß die Vektoren

$$v_1 = (1, 0, 0, 0), v_2 = (1, 0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 0, 1), v_4 = (0, 1, 0, 1)$$

linear abhängig sind, und untersuchen Sie, welche von ihnen sich als Linearkombination der restlichen drei Vektoren darstellen lassen.

Aufgabe 35:

Sei $U \subset \mathbb{R}^5$ der von den Vektoren

$$v_1 = (4, 1, 1, 0, -2), v_2 = (0, 1, 4, -1, 2), v_3 = (4, 3, 9, -2, 2),$$

$$v_4 = (1, 1, 1, 1, 1), v_5 = (0, -2, -8, 2, -4)$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Basis von U und ergänzen Sie diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$.

Bitte wenden!

Aufgabe 36:

Lösen Sie Aufgabe 32 mit Hilfe des Eliminationsverfahrens von Gauß.

Maple-Aufgabe M1:

- (i) Studieren Sie die Maple-Hilfe zu folgenden Themen:

- (a) *procedure*: Definition von Prozeduren in Maple.

Das Grundgerüst einer Prozedur sieht wie folgt aus:

```
proc ('Argumente')
  [local 'Variablen';]
  [global 'Variablen';]
  [options 'Optionen';]
  description 'Beschreibung';
  'Anweisungen'
end
```

Geklammerte Zeilen sind immer optional.

- (b) *assignment*: Zuweisung von Werten an Variablen in Maple.

'linke Seite' := 'rechte Seite';

- (c) *if*: Fallabhängige Anweisungen.

```
if 'Bedingung' then 'Anweisungen'
[elif 'Bedingung' then 'Anweisungen']
[else 'Anweisungen']
fi
```

- (d) *while*: Schleifen.

```
[for 'Name']
[from 'Ausdruck']
[by 'Ausdruck']
[to 'Ausdruck']
[while 'Ausdruck']
do 'Anweisungen' od;

oder

[for 'Name']
[in 'Ausdruck']
[while 'Ausdruck']
do 'Anweisungen' od;
```

- (ii) Schreiben Sie eine Prozedur in Maple, die bei Eingabe von zwei natürlichen Zahlen a, b den (ganzzahligen) Quotienten q und den Rest r ausgibt (Division mit Rest).

- (iii) Ändern Sie ihre Prozedur aus Teil (ii) so ab, daß diese nur den Rest r zurückgibt. Benutzen Sie dann Ihre abgeänderte Prozedur, um den Algorithmus **Sieb des Erasthenes** $erasthenes(n)$ zur Bestimmung aller Primzahlen unterhalb einer gegebenen Schranke n zu implementieren.

Hinweis: Das **Sieb des Erasthenes** benutzt folgenden Satz:

Satz: Ist $n \in \mathbb{N}$ nicht prim, so existiert eine Primzahl p mit

$$p \text{ teilt } n \text{ und } p \leq \sqrt{n}.$$