



Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I

WS 2000/01 Blatt 9

Abgabe: Freitag, den 12.01.2001, vor der Vorlesung

Aufgabe 29:

Seien G eine endliche Gruppe mit Neutralelement e und $a \in G$. Dann heißt

$$\text{ord}(a) := |U(a)|$$

die **Ordnung** von a . Zeigen Sie:

- (i) Für $n \in \mathbb{Z}$ ist $a^n = e \Leftrightarrow \text{ord}(a)$ ist ein Teiler von n .
- (ii) (**Kleiner Fermatscher Satz**) Es gilt $a^{|G|} = e$.
- (iii) Ist $m \in \mathbb{Z}$ und $d \in \mathbb{N}$ größter gemeinsamer Teiler von m und $\text{ord}(a)$, so gilt

$$\text{ord}(a^m) = \frac{\text{ord}(a)}{d}.$$

Aufgabe 30:

Seien $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subset R$ heißt **Ideal** von R , wenn gilt:

- (a) $\mathfrak{a}$ ist eine Untergruppe von R bzgl. $+$.
- (b) $a \in \mathfrak{a}, r \in R \Rightarrow a \cdot r \in \mathfrak{a}$ und $r \cdot a \in \mathfrak{a}$.

Zeigen Sie:

- (i) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie von Idealen in R ist wieder ein Ideal in R .
- (ii) Die Faktorgruppe $(R/\mathfrak{a}, +)$ wird durch
$$R/\mathfrak{a} \times R/\mathfrak{a} \longrightarrow R/\mathfrak{a}, \quad (r + \mathfrak{a}, s + \mathfrak{a}) \mapsto (r \cdot s) + \mathfrak{a}$$
zu einem Ring (**Faktoring** von R nach $\mathfrak{a}$).
- (iii) Ist $\varphi : R \rightarrow S$ ein Homomorphismus von Ringen, so ist Kern φ ein Ideal in R .

Aufgabe 31:

- (i) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die drei Vektoren

$$(1, 3, 4), (3, t, 11), (-1, -4, 0) \in \mathbb{R}^3$$

linear abhängig?

Begründen Sie Ihre Aussage.

- (ii) Zeigen Sie:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$$

ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie eine Basis von U .

Bitte wenden!

Aufgabe 32:

Sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen.

Ein $[n, k]$ -**Code** über $\mathbb{F}_q$ ist ein Untervektorraum $C \subset \mathbb{F}_q^n$ der Dimension k .

Eine **Erzeuger-Matrix** für C ist eine $k \times n$ -Matrix mit Koeffizienten in $\mathbb{F}_q$, deren Zeilen eine Basis von C bilden.

Bestimmen Sie eine Erzeuger-Matrix für die von den Zeilen der folgenden Matrizen aufgespannten Codes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{F}_2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M(5 \times 6, \mathbb{F}_3)$$

wobei $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

