



Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I

WS 2000/01 Blatt 8

Abgabe: Freitag, den 22.12.2000, vor der Vorlesung

Aufgabe 25:

Sei R ein nullteilerfreier, kommutativer Ring mit $1 \neq 0$ (**Integritätsring**). Zeigen Sie:

(i) In der Menge $R \times (R \setminus \{0\})$ ist durch

$$(a, b) \sim (a', b') \Leftrightarrow ab' = a'b$$

eine Äquivalenzrelation definiert.

Wir schreiben $\frac{a}{b}$ für die durch (a, b) repräsentierte Äquivalenzklasse sowie

$$Q(R) := \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) \in R \times (R \setminus \{0\}) \right\}$$

für die Menge aller Äquivalenzklassen.

(ii) Durch

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} := \frac{ab' + ba'}{bb'}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} := \frac{aa'}{bb'}$$

erhalten wir wohldefinierte Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf $Q(R)$.

(iii) $(Q(R), +, \cdot)$ ist ein Körper (**Quotientenkörper von R**).

Aufgabe 26:

Seien $u, v \in \mathbb{Z}$. Wir sagen: u **teilt** v , in Zeichen $u|v$, falls ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit $u \cdot k = v$.
Seien $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Definieren Sie induktiv eine Folge $c_0, c_1, c_2, \dots$ ganzer Zahlen durch

$$\begin{aligned} c_0 &= a, \\ c_1 &= b, \\ c_{i+1} &= \begin{cases} \text{der Rest von } c_{i-1} \text{ bei der Division durch } c_i, & \text{falls } c_i \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zeigen Sie: Es gibt einen kleinsten Index n mit $c_{n+1} = 0$. Für dieses n gilt:

(i) $c_n|a$ und $c_n|b$

(ii) c_n ist ein **größter gemeinsamer Teiler** von a und b , d.h. es gilt:

$$d|a \text{ und } d|b \Rightarrow d|c_n$$

Aufgabe 27:

Bestimmen Sie bis auf Isomorphie alle Körper mit 4 Elementen.

Aufgabe 28:

Seien K ein Körper und $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in K$ mit $a_i \neq a_j$ für alle $i \neq j$. Zeigen Sie:
Es gibt genau ein Polynom $f \in K[x]$ vom Grad $\leq n$, so daß $f(a_i) = b_i$ für $i = 1, \dots, n$.

Hinweis: Konstruieren Sie zuerst Polynome $g_k \in K[x]$ vom Grad $\leq n$ mit

$$g_k(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ 0 & \text{für } i \neq k. \end{cases}$$