



Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I

WS 2000/01 Blatt 7

Abgabe: Freitag, den 15.12.2000, vor der Vorlesung

Aufgabe 21:

Für $n, m \in \mathbb{Z}$ sei der Binomialkoeffizient $\binom{n}{m}$ definiert durch:

$$\binom{n}{m} := \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!} & \text{falls } n \geq m \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie: Es gilt

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m-1} = \binom{n+1}{m} \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$$

(ii) Sei R ein kommutativer Ring. Zeigen Sie die *binomische Formel*

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad \forall a, b \in R, n \in \mathbb{N}$$

Aufgabe 22:

Betrachten Sie den Ring $R = (\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}, +, \cdot)$ wie in der Vorlesung definiert und die Teilmenge

$$S = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}\}.$$

Zeigen Sie:

- (i) S ist ein Unterring von R . Bestimmen Sie die Verknüpfungstabelle bzgl. $+$ und $\cdot$.
- (ii) S ist ein Körper. Bestimmen Sie 1_S .
- (iii) Bestimmen Sie die Charakteristik von S .

Aufgabe 23:

Bestimmen Sie Real-, Imaginärteil und Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

$$\text{a) } \frac{3+5i}{7i+1} \quad \text{b) } \frac{1}{(3-i)^2} \quad \text{c) } \left[\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right]^3 \quad \text{d) } i^n \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 24:

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

- (i) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, $\bar{\bar{z}} = z$, $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$.
- (ii) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$.
- (iii) $|\bar{z}| = |z|$, $z\bar{z} = |z|^2$, $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ falls $z \neq 0$.