



Übungen zur Vorlesung  
Lineare Algebra I

WS 2000/01 Blatt 6

Abgabe: Freitag, den 8.12.2000, vor der Vorlesung

**Aufgabe 17:**

(i) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach  $n$ : Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$3 \text{ teilt } n^3 + 2n.$$

(ii) Für  $n \in \mathbb{N}$  ist die  $n$ -te Fibonacci-Zahl  $\mathcal{F}_n$  definiert durch

$$\mathcal{F}_0 := 0, \mathcal{F}_1 := 1,$$

$$\mathcal{F}_n := \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2} \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach  $n$ : Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathcal{F}_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

**Aufgabe 18:**

Für eine natürliche Zahl  $n \geq 3$  sei  $d \in S(\mathbb{R}^2)$  die Drehung um den Winkel  $\frac{2\pi}{n}$  und  $s \in S(\mathbb{R}^2)$  die Spiegelung an der  $x$ -Achse. Die **Diedergruppe**  $D_n$  ist definiert durch

$$D_n := U(s, d) \subset S(\mathbb{R}^2).$$

- (i) Wie viele Elemente hat  $D_n$ ?
- (ii) Geben Sie eine Gruppentafel von  $D_3$  an.

**Aufgabe 19:** Seien  $\varphi : G \rightarrow H$  ein Gruppenepimorphismus und  $\psi : G \rightarrow F$  ein Gruppenhomomorphismus mit

$$\text{Kern } \varphi \subset \text{Kern } \psi.$$

Zeigen Sie: Es existiert ein eindeutig bestimmter Gruppenhomomorphismus  $\eta : H \rightarrow F$ , so daß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\varphi} & H \\ \psi \searrow & & \swarrow \eta \\ & F & \end{array}$$

**Aufgabe 20:**

(i) Sei  $G = U(a)$  eine zyklische Gruppe. Zeigen Sie:

$$\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow G, n \mapsto a^n$$

ist ein Epimorphismus.

(ii) **Klassifikation zyklischer Gruppen:** Zeigen Sie: Jede zyklische Gruppe ist isomorph entweder zu  $(\mathbb{Z}, +)$  oder zu  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  für ein  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .