



Übungen zur Vorlesung
Lineare Algebra I

WS 2000/01 Blatt 5

Abgabe: Freitag, den 1.12.2000, vor der Vorlesung

Aufgabe 13:

- (i) Sei $\varphi : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie:
- (a) $U \subset G$ Untergruppe $\Rightarrow \varphi(U) \subset H$ Untergruppe.
 - (b) $V \subset H$ Untergruppe $\Rightarrow \varphi^{-1}(V) \subset G$ Untergruppe.
- (ii) Welche der folgenden Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen von $(\mathbb{Z}, +)$ nach $(\mathbb{Z}, +)$?

a) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a \rightarrow 2a$ b) $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad a \rightarrow a + 1$.

Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 14:

- (i) Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie: Das **Zentrum** von G ,

$$Z(G) := \{z \in G \mid a \circ z = z \circ a \quad \forall a \in G\}$$

ist ein Normalteiler in G .

- (ii) Bestimmen Sie $Z(S_3)$.

Aufgabe 15: Konstruieren Sie eine Gruppe mit 4 Elementen, die nicht isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist.

Begründen Sie, daß es sich tatsächlich um eine Gruppe handelt, und daß diese nicht isomorph zur Kleinschen Vierergruppe ist.

Aufgabe 16:

- (i) Sei X eine Menge. Zeigen Sie: Durch

$$A \sim B \Leftrightarrow \exists \text{ bijektive Abbildung } A \rightarrow B$$

ist eine Äquivalenzrelation in $\mathcal{P}(X)$ definiert.

- (ii) Sei X eine endliche Menge mit n Elementen.

Wieviele Äquivalenzklassen gibt es bzgl. $\sim$ wie in (i) ?