

## Lösung zur 14. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

**Aufgabe 19.1** Man untersuche die folgenden Funktionen  $f$  auf ihren Definitionsbereichen auf Differenzierbarkeit und berechne gegebenenfalls ihre Ableitung:

$$\text{a) } f(x) = (1 + x^3)e^x \qquad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (\alpha > 0) \qquad \text{c) } f(x) = x^x, x > 0.$$

a)  $f(x) = (1 + x^3) e^x$ , Definitionsbereich:  $\mathbb{R}$ .

$1 + x^3$  als Polynom differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  mit Ableitung  $3x^2$ ,

$e^x$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  mit Ableitung  $e^x$

$\implies f$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  (als Produkt von  $1 + x^3$  und  $e^x$ )  
mit  $f'(x) = 3x^2 e^x + (1 + x^3) e^x = (x^3 + 3x^2 + 1) e^x$ .

b) Sei  $\alpha > 0$ .  $f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$  Definitionsbereich:  $\mathbb{R}$ .

$f(x) = 0$  für alle  $x < 0 \implies f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}^-$  mit  $f'(x) = 0$  für alle  $x < 0$ .

$f(x) = 1 - e^{-\alpha x}$  für alle  $x > 0 \implies f$  differenzierbar in  $\mathbb{R}^+$  mit  $f'(x) = \alpha e^{-\alpha x}$   
(nach der Kettenregel) für alle  $x > 0$ .

$x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0. \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-\alpha x}}{x} : \text{Setze } g(x) = 1 - e^{-\alpha x}, h(x) = x. \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 0, \quad g'(x) = \alpha e^{-\alpha x}, \quad h'(x) = 1.$$

Nach der Regel von de l'Hospital ist

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{h(x)} = \alpha \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0}.$$

Damit ist  $f$  an der Stelle 0 nicht differenzierbar.

c)  $f(x) = x^x$ , Definitionsbereich:  $\mathbb{R}^+$ .

$$f(x) = x^x = e^{\log(x^x)} = e^{x \log x}.$$

$x$  und  $\log x$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}^+$   $\implies x \cdot \log x$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}^+$  (Produktregel)

$e^x$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}^+$   $\implies e^{x \log x}$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}^+$  (Kettenregel),

und es gilt

$$f'(x) = e^{x \log x} \left( \log x + \frac{x}{x} \right) = e^{x \log x} (\log x + 1) = x^x (\log x + 1).$$

**Aufgabe 19.12** Es seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle,  $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$  mit  $f(I) \subseteq J$  und  $h \in \mathcal{C}^\infty(J)$ . Man zeige  $(h \circ f)'' = (h' \circ f)f'' + (h'' \circ f)f'^2$ , berechne  $(h \circ f)'''$  sowie  $(h \circ f)^{(4)}$  und versuche, eine allgemeine Formel für  $(h \circ f)^{(m)}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  zu finden.

Mit der Kettenregel gilt

$$(h \circ f)' = (h' \circ f) f'.$$

Mit Ketten- und Produktregel folgt daraus

$$(h \circ f)'' = ((h' \circ f) f')' = (h'' \circ f) f'^2 + (h' \circ f) f''.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} (h \circ f)''' &= ((h \circ f)'')' \\ &= \left( (h' \circ f) f'' + (h'' \circ f) f'^2 \right)' \\ &= (h'' \circ f) f' f'' + (h' \circ f) f''' + (h''' \circ f) f'^3 + (h'' \circ f) 2 f' f'' \\ &= (h' \circ f) f''' + 3(h'' \circ f) f' f'' + (h''' \circ f) f'^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ f)^{(4)} &= ((h \circ f)''')' \\ &= \left( (h' \circ f) f''' + 3(h'' \circ f) f' f'' + (h''' \circ f) f'^3 \right)' \\ &= (h'' \circ f) f' f''' + (h' \circ f) f^{(4)} + 3(h'' \circ f)(f''^2 + f' f''') + 3(h''' \circ f) f'^2 f'' + \\ &\quad 3(h''' \circ f) f'^2 f'' + (h^{(4)} \circ f) f'^4 \\ &= (h' \circ f) f^{(4)} + 4(h'' \circ f) f' f''' + 3(h'' \circ f) f''^2 + 6(h''' \circ f) f'^2 f'' + (h^{(4)} \circ f) f'^4. \end{aligned}$$

**Aufgabe 20.9** Man berechne die folgenden Grenzwerte:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x - \log(1+x)} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} \right) \quad (a, b \neq 0)$$

a) Setze  $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$ ,  $g(x) = x - \log(1+x)$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0,$$

$$f'(x) = e^x - e^{-x}, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} g'(x) = 0$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x}, \quad g''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 2.$$

Nach der Regel von de l'Hospital (Kaballo, Satz 20.15) gilt dann auch  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ .

b)

$$\frac{a}{1-x^a} - \frac{b}{1-x^b} = \frac{a - ax^b - b + bx^a}{1-x^a - x^b + x^{a+b}}.$$

Setze  $f(x) = a - b - ax^b + bx^a$ ,  $g(x) = 1 - x^a - x^b + x^{a+b}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0,$$

$$f'(x) = ab(x^{a-1} - x^{b-1}), \quad g'(x) = (a+b)x^{a+b-1} - ax^{a-1} - bx^{b-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1} g'(x) = 0,$$

$$f''(x) = ab(a-1)x^{a-2} - ab(b-1)x^{b-2},$$

$$g''(x) = (a+b)(a+b-1)x^{a+b-2} - a(a-1)x^{a-2} - b(b-1)x^{b-2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{ab(a-b)}{2ab} = \frac{a-b}{2}.$$

Nach der Regel von de l'Hospital ist dann auch

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a-b}{2}.$$

**Aufgabe 22.1** Für die Funktionen  $f : x \mapsto \int_1^x \frac{x}{1+e^{2t}} dt$  und  $g : x \mapsto \int_1^{x^3} \frac{x}{1+e^{2t}} dt$  berechne man die Ableitungen  $f'(x)$  und  $g'(x)$ .

1.  $f(x) = \int_1^x \frac{x}{1+e^{2t}} dt = x \cdot \int_1^x \frac{dt}{1+e^{2t}} = x \cdot h(x)$  mit  $h(x) = \int_1^x \frac{dt}{1+e^{2t}}$ . Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ist  $h'(x) = \frac{1}{1+e^{2x}}$ . Mit der Produktregel ergibt sich dann:

$$f'(x) = 1 \cdot \int_1^x \frac{dt}{1+e^{2t}} + x \frac{1}{1+e^{2x}} = \int_1^x \frac{dt}{1+e^{2t}} + \frac{x}{1+e^{2x}}.$$

2.  $g(x) = \int_1^{x^3} \frac{x}{1+e^{2t}} dt = x \cdot \int_1^{x^3} \frac{dt}{1+e^{2t}} = x \cdot h(i(x))$  mit  $h$  wie oben und  $i(x) = x^3$ . Mit der Produkt- und Kettenregel ergibt sich dann:

$$g'(x) = 1 \cdot \int_1^{x^3} \frac{dt}{1+e^{2t}} + x \cdot \frac{1}{1+e^{2x^3}} \cdot 3x^2 = \int_1^{x^3} \frac{dt}{1+e^{2t}} + \frac{3x^3}{1+e^{2x^3}}.$$

Bemerkung:  $\int \frac{dt}{1+e^{2t}} = -\frac{1}{2} \int \frac{-2e^{-2t}}{e^{-2t}+1} dt = -\frac{1}{2} \log(e^{-2t} + 1)$ .

**Aufgabe 22.3** Für folgende Funktionen bestimme man Stammfunktionen über geeigneten Intervallen:

a)  $x \log x$       b)  $(\log x)^3$       c)  $e^{\sqrt{x}}$       d)  $\frac{1}{\sqrt{1+e^x}}$       e)  $x^x(1 + \log x)$

a) Mit partieller Integration erhält man:

$$\int x \log x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} \, dx = \frac{1}{2} x^2 \log x - \frac{1}{4} x^2$$

für  $x \in ]0, \infty[$ .

b) Mit Substitution  $x = e^u$ ,  $u = \log x$  für  $x \in ]0, \infty[$ ,  $u \in \mathbb{R}$  und dreifacher partieller Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int (\log x)^3 \, dx &= \int u^3 \cdot e^u \, du \\ &= u^3 e^u - \int 3u^2 e^u \, du \\ &= u^3 e^u - 3u^2 e^u + \int 6u e^u \, du \\ &= u^3 e^u - 3u^2 e^u + 6u e^u - \int 6e^u \, du \\ &= e^u (u^3 - 3u^2 + 6u - 6) \\ &= x \cdot ((\log x)^3 - 3(\log x)^2 + 6 \log x - 6) \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} \, dx &= \int e^u \, 2u \, du && \text{Substitution: } x = u^2, u = \sqrt{x} \\ &&& \text{für } x \in ]0, \infty[, u \in ]0, \infty[ \\ &= 2u e^u - \int 2e^u \, du && \text{partielle Integration} \\ &= e^u \cdot (2u - 2) \\ &= 2e^{\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x} - 2) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} &= \int \frac{1}{u} \cdot 2u \cdot \frac{1}{u^2-1} \, du && \text{Subst.: } x = \log(u^2-1), u = \sqrt{1+e^x} \\ &&& \text{für } x \in \mathbb{R}, u \in ]1, \infty[ \\ &= \int \frac{2}{u^2-1} \, du \\ &= \int \left( \frac{-1}{u+1} + \frac{1}{u-1} \right) \, du \\ &= -\log(u+1) + \log(u-1) \\ &= -\log(\sqrt{1+e^x}+1) + \log(\sqrt{1+e^x}-1). \end{aligned}$$

e) Siehe dazu auch Aufgabe 19.1 c). Variante:

$$\begin{aligned}
 \int x^x \cdot (1 + \log x) \, dx &= \int e^{x \log x} (1 + \log x) \, dx \\
 &= \int e^{e^u \cdot u} \cdot (1 + u) \cdot e^u \, du && \text{Subst.: } x = e^u, u = \log x \\
 &&& \text{für } x \in ]0, \infty[, u \in \mathbb{R} \\
 &= e^{e^u \cdot u} \\
 &= e^{x \log x} \\
 &= x^x.
 \end{aligned}$$

**Aufgabe 14.2** Gegeben sei die Funktionenfolge  $\left(n(\sqrt[n]{x} - 1)\right)_{n \in \mathbb{N}}$  auf  $(0, \infty)$

- a) Man zeige, daß diese auf allen kompakten Teilintervallen gleichmäßig gegen  $\log x$  konvergiert.  
b) Ist die Konvergenz auf dem angegebenen Intervall selbst gleichmäßig?

HINWEIS: Schreiben Sie  $n(\sqrt[n]{x} - 1)$  als Integral.

a) Es ist  $f_n(1) = 0$ . Dann ist

$$f_n(x) = f_n(x) - f_n(1) = \int_1^x f'_n(u) \, du = \int_1^x u^{\frac{1}{n}-1} \, du.$$

Die Funktionenfolge  $u^{\frac{1}{n}-1}$  konvergiert auf allen kompakten Intervallen  $[a, b] \subseteq (0, \infty)$  gleichmäßig gegen  $g(u) := u^{-1}$ :

$$|u^{\frac{1}{n}-1} - u^{-1}| = u^{-1} |u^{\frac{1}{n}} - 1| \leq a^{-1} \max\{|a^{\frac{1}{n}} - 1|, |b^{\frac{1}{n}} - 1|\} \rightarrow 0$$

unabhängig von  $x \in [a, b]$ . Beachte dabei die Monotonie von  $u \mapsto u^{\frac{1}{n}} - 1$ .

Wegen Kor. 3.1.17 Teil 2 (Vertauschen von Integral und Grenzwert bei gleichmäßiger Konvergenz) ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_1^x \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(u) \, du = \int_1^x \frac{1}{u} \, du = \log x - \log 1 = \log x,$$

und auch hier ist die Konvergenz gleichmäßig auf allen kompakten Intervallen  $[a, b] \subseteq (0, \infty)$ : Nach Kor. 3.1.17 Teil 1 (Beschränktheit des Integrals) gilt:

$$\begin{aligned}
 |f_n(x) - \log x| &= \left| \int_1^x f'_n(u) \, du - \int_1^x \frac{1}{u} \, du \right| \leq |x - 1| \|f'_n - g\| \\
 &\leq \max\{|a - 1|, |b - 1|\} \|f'_n - g\| \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

unabhängig von  $x \in [a, b]$ .

- b) Betrachte  $x_n = 2^n$ .  $|f_n(x_n) - \log(x_n)| = n|1 - \log(2)|$  konvergiert nicht gegen Null für  $n \rightarrow \infty$ . Also konvergiert  $f_n$  nicht gleichmäßig gegen  $\log$ .