

Lösung zur 13. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Bemerkung In der elementaren Trigonometrie werden *Sinus* und *Cosinus* eines Winkels φ wie folgt definiert: Man realisiert φ als Winkel zwischen der positiven x -Achse und einem Strahl vom Ursprung durch einen Punkt (x, y) auf der Kreislinie $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \xi^2 + \eta^2 = 1\}$. Dann setzt man $\sin(\varphi) := y$ und $\cos(\varphi) := x$. Den Winkel gibt man im Bogenmaß an. Die Funktion $\sin(t)$ hat die Stammfunktion $-\cos(t)$ und die Funktion $\cos(t)$ die Stammfunktion $\sin(t)$.

Wir benutzen zur Lösung der Aufgaben folgende drei Sätze:

1. Partielle Integration: (Satz 3.1.33)

Seien F, G Stammfunktionen der Regelfunktionen f, g . Dann gilt

$$\int Fg = FG - \int fG.$$

2. Substitution: (Bemerkung zu Beginn von Abschnitt 3.1.10)

Sei g Regelfunktion mit $g \geq 0$, G Stammfunktion zu g , f stetig. Dann gilt

$$\int_{[G(a), G(b)]} f = \int_{[a, b]} (f \circ G) g.$$

Diese Formel gilt auch, falls $g \leq 0$ oder g stückweise größer oder kleiner als Null.

3. Stammfunktion zu $\frac{1}{x}$: (Satz 3.1.29)

$$\int_1^x \frac{dt}{t} = \log x.$$

Aufgabe I1 Bestimmen Sie die Stammfunktionen:

$$\text{a) } \int \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} dx \quad \text{b) } \int e^x \sin x dx \quad \text{c) } \int (\sin x + \cos x)^2 dx.$$

a) Mit $g(x) = -\cos(x)$, $G(x) = 1 - \sin x$ und $f(x) = \frac{x-1}{x}$ gilt mit der Substitutionsregel:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x} dx &= \int (f \circ G) \cdot g \\ &= \left(\int f \right) \circ G \\ &= \int \left(1 - \frac{1}{t} \right) dt \circ G \\ &= (t - \log t) \circ G \\ &= 1 - \sin x - \log(1 - \sin x). \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion zu $\frac{\sin x \cos x}{1 - \sin x}$ lautet $-\sin x - \log(1 - \sin x)$.

b) Mit $F(x) = f(x) = e^x$, $G(x) = \sin x$ und $g(x) = \cos x$ gilt mit der Regel für partielle Integration:

$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \quad \text{und} \quad \int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x dx.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned}\int e^x \sin x \, dx &= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \\ &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x (\sin x - \cos x) - \int e^x \sin x \, dx.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x).$$

c) Mit $F(x) = G(x) = \sin x$ und $f(x) = g(x) = \cos x$ ergibt sich aus der Regel für partielle Integration

$$\int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x - \int \sin x \cos x \, dx \implies 2 \int \sin x \cos x \, dx = \sin^2 x.$$

Nach der Herleitung des Sinus und Cosinus (s. o.) liegt für alle $x \in \mathbb{R}$ der Punkt (y, z) mit $\cos x = y$ und $\sin x = z$ auf der Einheitskreislinie. Also gilt $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int (\sin x + \cos x) \, dx &= \int (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x) \, dx \\ &= \int (1 + 2 \sin x \cos x) \, dx \\ &= \int dx + 2 \int \sin x \cos x \, dx \\ &= x + \sin^2 x.\end{aligned}$$

Aufgabe I2 Bestimmen Sie die Stammfunktionen:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} \quad \text{b) } \int x e^{x^2} dx \quad \text{c) } \int a^x dx \text{ für } a \in \mathbb{R}.$$

a) Setze $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ und $G(x) = \sqrt{x} + 1$. Mit der Regel für die Substitution gilt dann

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} &= 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}+1} \\ &= 2 \int g(x) \cdot (f \circ G)(x) \, dx \\ &= 2 \left(\int f \right) \circ G(x) \\ &= 2 \log(\sqrt{x} + 1).\end{aligned}$$

b) Mit $G(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ und $f(x) = e^x$ erhält man durch Anwenden der Substitutionsregel

$$\int x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} e^{x^2}.$$

- c) Betrachte $\int a^x dx$ für $a \in \mathbb{R}$. a^x ist nur definiert für $a > 0$.
Für $a = 1$ gilt $a^x = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit

$$\int a^x dx = \int dx = x.$$

Für $a \neq 1$ ist $\log a \neq 0$. Dann gilt mit $G(x) = x \log a$, $g(x) = \log a$ und $f(x) = e^x$ und der Substitutionsregel:

$$\int a^x dx = \int e^{x \log a} = \frac{1}{\log a} \int (\log a) e^{x \log a} dx = \frac{1}{\log a} e^{x \log a} = \frac{1}{\log a} a^x.$$

Aufgabe I3 Zeigen Sie:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^3 x}{1 - \sin x} dx = \int_0^1 3 y e^y dy$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int \frac{2 \cos^3 x}{1 - \sin x} dx &= \int \frac{2 \cos^3 x (1 + \sin x)}{1 - \sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{2 \cos^3 x (1 + \sin x)}{\cos^2 x} dx \\ &= \int (2 \cos x + 2 \cos x \sin x) dx \\ &= \int 2 \cos x dx + \int (2 \cos x \sin x) dx \\ &= 2 \sin x + \sin^2 x \quad (\text{mit Aufgabe I1 (c)}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^3 x}{1 - \sin x} dx = 2 \sin \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{2} - 2 \sin 0 - \sin^2 0 = 2 + 1 = 3.$$

Weiter gilt mit $F(y) = 3y$, $f(y) = 3$ und $G(y) = g(y) = e^y$ mit der Formel für partielle Integration:

$$\int 3 y e^y dy = \int F(y)g(y) dy = FG - \int f(y)G(y) dy = 3 y e^y - 3 \int e^y dy = 3 y e^y - 3 e^y.$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 3 y e^y dy = 3 e^1 - 3 e^1 - 0 + 3 e^0 = 3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^3 x}{1 - \sin x} dx.$$

Aufgabe I4 Zeigen Sie: Für eine Funktion f mit Stammfunktion F gilt:

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} dx = \log |F(x)| + C$$

Geben Sie auch die notwendigen Voraussetzungen an.

Voraussetzungen: Sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion mit Stammfunktion F , und sei entweder $F(x) > 0$ für alle $x \in I$. Sei weiter $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$.

1. Fall: $F > 0$.

$$\int \frac{f}{F} = \left(\int \frac{dt}{t} \right) \circ F = \log \circ F.$$

2. Fall: $F < 0$. Dann ist $-F$ eine Stammfunktion von $-f$, und es ist

$$\int \frac{f}{F} = \int \frac{-f}{-F} = \left(\int \frac{dt}{t} \right) \circ (-F) = \log \circ (-F) = \log \circ |F|.$$

Bemerkung: Die Voraussetzung $f(x) \geq 0$ ist nicht notwendig.

Aufgabe I5 Zeigen Sie:

- a) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\int_0^y t^{\frac{1}{n}} dt = \frac{n}{n+1} y^{1+\frac{1}{n}}$.
- b) 1. Nun folgt induktiv $\int_0^x t^{1+\frac{1}{n}} t^{\frac{1}{n}} dt = \frac{n}{n+2} x^{1+\frac{2}{n}}$ usw.
 Und schließlich $\int_0^x t^r dt = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$ für $1 \leq r \in \mathbb{Q}$.
2. Man folgere aus 1., daß $\int_0^x t^r dt = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$ für $0 \leq r < 1, r \in \mathbb{Q}$.
3. Man folgere aus $\int x^{-2} dx = -x^{-1}$, daß $\int_1^y \frac{1}{\sqrt{\eta}} d\eta = 2(\sqrt{y} - 1)$, d.h. $\int x^{-\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$.
4. Endlich ist $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$ für $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ und $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Formel

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1}$$

für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ zu gewinnen.

Aus der Vorlesung bekannt ist sie für $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$.

Da die Aufgabe fehlerhaft formuliert war, werden wir die Lösung anders aufbauen als in der Aufgabenstellung in Teil (b) skizziert.

- a) Der Fall $a = \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$:

Nach dem Satz über das Integral der Umkehrfunktion gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^x t^n dt + \int_0^{x^n} t^{\frac{1}{n}} dt &= x \cdot x^n = x^{n+1} \\ \Rightarrow \int_0^{x^n} t^{\frac{1}{n}} dt &= x^{n+1} - \int_0^x t^n dt = x^{n+1} - \frac{1}{n+1} x^{n+1} = \frac{n}{n+1} x^{n+1}. \end{aligned}$$

Mit $x := y^{\frac{1}{n}}$ folgt:

$$\int_0^y t^{\frac{1}{n}} dt = \frac{n}{n+1} y^{\frac{1}{n}(n+1)} = \frac{n}{n+1} y^{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} y^{1+\frac{1}{n}}.$$

b)

1. Falls $a, b-1, a+b \neq -1$ sind und die Formel für a und $b-1$ gilt, so gilt sie auch für $a+b$:
 Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int x^{a+b} dx &= \int x^a \cdot x^b dx \\ &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} \cdot x^b - \int \frac{1}{a+1} x^{a+1} b x^{b-1} dx \\ &= \frac{1}{a+1} x^{a+1+b} - \frac{b}{a+1} \int x^{a+b} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{b}{a+1}\right) \int x^{a+b} dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+b+1} \\ \Leftrightarrow \quad \int x^{a+b} dx &= \frac{1}{a+b+1} x^{a+b+1}. \end{aligned}$$

2. Die Formel gilt für alle $a \in \mathbb{Z} + \frac{p}{n}$, wobei $n, p \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $1 \leq p < n$.

Beweis: Induktion nach p .

Induktionsannahme: $p = 1$, $a = z + \frac{1}{n}$.

Ist $z \neq 0$, so ergibt sich die Behauptung mit Hilfe von 1. und a): Sie gilt nämlich für z^{-1} und für $\frac{1}{n}$.

Ist $z = 0$, so ist die Behauptung in Teil a) gezeigt.

Induktionsschritt: Sei $p \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < n - 1$, und die Formel gelte für $a = z + \frac{p}{n}$ für jedes $z \in \mathbb{Z}$.

Dann ist $z + \frac{p+1}{n} = (z + \frac{p}{n}) + \frac{1}{n}$, die Formel gilt für $\frac{1}{n}$ und für $z + \frac{p}{n} - 1 = \underbrace{(z-1)}_{\in \mathbb{Z}} + \frac{p}{n}$ und

damit nach 1. auch für $z + \frac{p+1}{n}$.

3. Die Formel ist jetzt gezeigt für alle $a \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$.

Die Funktion

$$f_x : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad a \longmapsto \frac{1}{a+1} x^{a+1} - \frac{1}{a+1}$$

ist eine stetige Fortsetzung der Funktion

$$\tilde{f}_x : \mathbb{Q} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad a \longmapsto \frac{1}{a+1} x^{a+1} - \frac{1}{a+1}.$$

Die Funktion

$$g_x : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad a \longmapsto \int_1^x t^a dt$$

ist nach dem bisher gezeigten ebenfalls eine Fortsetzung von $\tilde{f}_x$.

Aus der Vorlesung ist bekannt

$$\begin{aligned} |g_x(a) - g_x(r)| &\leq \int_1^x |t^a - t^r| dt \\ &\leq \int_1^x |a - r| |\log t| \max\{t^a, t^r\} dt \\ &\leq \int_1^x |a - r| |\log t| \max\{x^a, x^r, 1\} dt \\ &\leq |x - 1| |a - r| |\log x| \max\{x^a, x^r, 1\}. \end{aligned}$$

Daher ist auch g_x stetig, und folglich ist $g_x = f_x$.

WICHTIGER HINWEIS: Anmeldung zur Klausur am 3.3.2001 beim Übungsgruppenleiter **bis Mittwoch (!) 21.2.2001**

- Für die Teilnehmenden der Übungsgruppen: In der Übung.
- Für die Teilnehmenden der Saalübung: In der Sprech- und Fragestunde.
- **Nicht per E-mail !**

Klausurspielregeln

- Die Klausur dauert **drei Stunden**. Sie umfaßt 7 Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Mit 27 Punkten haben Sie bestanden.
- Erlaubtes Hilfsmittel ist ein **handbeschriebenes DIN A3 Blatt**. (Sie dürfen auch zwei DIN A4 Blätter zusammenkleben.) Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich auf dieses Blatt.
- Bringen Sie Papier und Schreibzeug mit. Auf jedem Blatt muß Name und Matrikelnummer stehen. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.
- **Nicht erlaubt** sind Taschenrechner und Handy. Ein Handy führt zum sofortigen Ausschluß von der Klausur.
- Während der Klausur werden die Taschen an den Hörsaalseiten und nicht in den Bänken aufbewahrt: bringen sie also nur das Nötigste mit.
- Halten Sie während der Klausur **Studierendenausweis und Personalausweis** bereit.
- An der Nachklausur kann nur teilnehmen, wer an der Klausur teilgenommen hat oder mit Attest entschuldigt ist. Sie können an der Nachklausur auch teilnehmen, wenn Sie die Hauptklausur bestanden haben; dann zählt die bessere Note.

An alle Studierenden der Fachrichtung 6.1 – Mathematik der Universität des Saarlandes

Liebe Studentin, lieber Student:

Wie viele von Ihnen bereits wissen, fordert der Fachbereich Mathematik alle Studierenden mit dem Hauptfach Mathematik auf, sich im Laufe ihres Studiums von einem Professor der Mathematik beraten zu lassen.

Studierende des ersten Studienabschnittes sollten nach dem Vordiplom bzw. der Zwischenprüfung (spätestens jedoch bis zum Ende des fünften Fachsemesters) ein solches Beratungsgespräch führen. Weiterhin wird erwartet, daß sich alle Studentinnen und Studenten bis spätestens zum Ende des achten Fachsemesters um ein Thema für eine Diplom- bzw. Staatsexamensarbeit bemüht haben; letzteres natürlich nur, falls Mathematik als das erste Fach gewählt wurde.

Über die Durchführung des Beratungsgespräches bzw. die Aufnahme in eine Arbeitsgruppe wird vom jeweiligen Professor eine Bescheinigung ausgestellt. Bitte geben Sie diese im Geschäftszimmer (Geb. 27.1, Zi. 310) ab.

Viel Erfolg für Ihr Studium!

Sprechstunden der Professoren im Wintersemester 2000/2001:

Albrecht	Di 14–15, Mi 11–12 + n.V.	☎ 302-3256	Grüter	n.V.	☎ 302-2287
Arnold	Di 11–12	☎ 302-3647	Hischer	Do 14–15	☎ 302-2231
Berger	Mi 9–11	☎ 302-3431	Louis	n.V.	☎ 302-3018
Brosamler	n.V.	☎ 302-3427	Rjasanow	Mo 10–11	☎ 302-4861
Decker	Di 14–16	☎ 302-2906	Schulze-Pillot	Mo 14–15	☎ 302-4835
Eschmeier	Di 13–14	☎ 302-2732	Wittstock	n.V.	☎ 302-2756
Fuchs	Mo 11–12	☎ 302-3406	Zimmer	Di, Do 16–17	☎ 302-2206
Gekeler	Mi 11–13	☎ 302-2494			