

Lösung zur 12. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 13.4 Man untersuche folgende Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

a) $x\sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ b) $x + \sqrt[3]{x}$ auf $[0, \infty)$

a) **Behauptung:** $x \mapsto x\sqrt{x}$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

Beweis: Betrachte die Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, \infty)$ mit $x_n := n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ und $y_n := n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - y_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} - n^2 \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned} |x_n\sqrt{x_n} - y_n\sqrt{y_n}| &= \left| \left(n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sqrt{n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}}} - n^2\sqrt{n^2} \right| \\ &= \left(n^2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2\sqrt{n}} \right)} - n^3 \\ &= (n^3 + \sqrt{n}) \sqrt{1 + \frac{1}{n^2\sqrt{n}}} - n^3 \\ &\geq n^3 + \sqrt{n} - n^3 \\ &= \sqrt{n} \\ &\geq 1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Wähle also $\varepsilon = 1$. Dann gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $|x_n - y_n| < \delta$, aber $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.

b) **Behauptung:** $x \mapsto x + \sqrt[3]{x}$ ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.

Beweis: Wir zeigen zunächst eine einfache **Hilfsbehauptung:**

Sind $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so gilt dies auch für $f + g$.

Seien dazu $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta_f > 0$, so dass für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta_f$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ebenso gibt es ein $\delta_g > 0$, so dass für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta_g$ gilt $|g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dann gilt für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \min\{\delta_f, \delta_g\}$:

$$\begin{aligned} |(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\quad \text{(Dreiecksungleichung)} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Funktion $x \mapsto x$ ist gleichmäßig stetig.

Es gilt $x^3 - y^3 = (x^2 + xy + y^2)(x - y)$. Daraus folgt für $x, y \in [1, \infty)$:

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}| = \left| \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \right| \leq \frac{1}{3} |x - y|.$$

Daher ist $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ gleichmäßig stetig auf $[1, \infty)$ (sogar Lipschitz-stetig). Da $[0, 2]$ ein kompaktes Intervall ist und $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ stetig auf $[0, 2]$, ist die Funktion dort auch gleichmäßig stetig. Damit hat sie diese Eigenschaft auf $[0, \infty)$ (vgl. dazu Übung 11, Aufgabe 13.2(b)).

Nach unserer Hilfsbehauptung ist damit auch die Summe der beiden Funktionen, also $x \mapsto x + \sqrt[3]{x}$, auf $[0, \infty)$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 13.4 Man untersuche folgende Funktionen auf gleichmäßige Stetigkeit:

$$\text{e) } \log x \text{ auf } (0, 1) \qquad \text{f) } \log x \text{ auf } [1, \infty)$$

e) **Behauptung:** $x \mapsto \log x$ ist nicht gleichmäßig stetig auf $(0, 1)$.

Beweis: Betrachte die Cauchyfolge $(x_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, 1)$.

Es gilt $\log\left(\frac{1}{2^n}\right) = -n \log 2$, d. h. das Bild der Folge unter der Abbildung $\log$ ist keine Cauchyfolge. Damit ist aber nach Aufgabe 13.7 $\log$ nicht gleichmäßig stetig auf $(0, 1)$.

f) **Behauptung:** $x \mapsto \log x$ ist gleichmäßig stetig auf $[1, \infty)$.

Beweis: Zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in [1, \infty) \quad |x - y| < \delta \implies |\log x - \log y| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$.

$x \mapsto \log x$ ist stetig in 1, d. h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in [1, \infty)$ mit $|z - 1| < \delta$ gilt: $|\log z - \log 1| = |\log z| = \log z < \varepsilon$.

Seien jetzt $x, y \in [1, \infty)$ mit $|x - y| < \delta$ und $x \geq y$.

Dann gilt: $\frac{x}{y} \geq 1$ und $x < y + \delta$ und damit

$$\left| \frac{x}{y} - 1 \right| = \frac{x}{y} - 1 < \frac{y + \delta}{y} - 1 = \frac{\delta}{y} \leq \delta.$$

Daraus folgt

$$|\log x - \log y| = \left| \log \left(\frac{x}{y} \right) \right| = \log \left(\frac{x}{y} \right) < \varepsilon.$$

Aufgabe 13.7 Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und (x_n) eine Cauchyfolge in I . Man zeige, daß auch $(f(x_n))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist. Gilt dies auch für stetige, nicht gleichmäßig stetige Funktionen?

1. Zu zeigen: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Da (x_n) eine Cauchyfolge ist, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq n_0$ gilt: $|x_n - x_m| < \delta$.

Also ist für alle $n, m \geq n_0 \quad |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.

2. Für stetige Funktionen muss dies nicht gelten, betrachte dazu Aufgabe 13.4 (e). Ein weiteres Gegenbeispiel lautet:

Betrachte $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \frac{1}{x}$ und die Cauchyfolge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $(0, \infty)$ mit $x_n := \frac{1}{n}$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

f ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Es gilt $f(x_n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, damit ist das Bild einer Cauchyfolge eine unbeschränkte Folge und somit keine Cauchyfolge.

Aufgabe 18.3 a) Es sei $f \in \mathcal{C}(J)$ mit $\int_J |f(x)| dx = 0$. Man zeige $f = 0$.

Beweis durch Kontraposition:

Wir zeigen: Nimmt f Werte $\neq 0$ an, so ist $\int_J |f(x)| dx \neq 0$.

Mit f ist auch $|f|$ stetig als Hintereinanderausführung stetiger Funktionen.

Sei $x_0 \in J$ und $f(x_0) \neq 0$. Dann ist $|f(x_0)| > 0$. Wegen der Stetigkeit von $|f|$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in J$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt: $||f(x_0)| - |f(x)|| < \frac{|f(x_0)|}{2}$. Dieses δ kann man kleiner als die Intervalllänge von J wählen.

Dann ist für diese x auch

$$|f(x_0)| - |f(x)| \leq ||f(x)| - |f(x_0)|| < \left| \frac{f(x_0)}{2} \right|,$$

und daher $|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}$. Wir definieren die Treppenfunktion

$$t : J \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \begin{cases} \frac{|f(x_0)|}{2}, & \text{falls } |x - x_0| \leq \frac{\delta}{2} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit ist $t(x) \leq |f(x)|$ für alle x , und $\int_J t(x) dx \geq \delta \frac{|f(x_0)|}{4} > 0$.

(Falls der Abstand von x_0 zu einem der Randpunkte von J kleiner als $\frac{\delta}{2}$ ist, so ist die Länge des Intervalls, auf dem t ungleich Null ist, kleiner als δ . Im äußersten Fall ist x_0 selbst ein Randpunkt von J und es gilt $\int_J t(x) dx = \delta \frac{|f(x_0)|}{4}$.)

Es folgt mit der Monotonie des Integrals

$$\int_J |f(x)| dx \geq \int_J t(x) dx > 0.$$

Aufgabe 18.4 Für $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ definiert man ein Halbskalarprodukt durch

$$\langle f, g \rangle := \int_J f(x)g(x) dx.$$

a) Man zeige $\langle f, f \rangle \geq 0$, $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$ und $\langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle = \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle$. ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

b) Man beweise die *Schwarzsche Ungleichung* $|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$.

Hinweis: Für b) benutze man a) und $\langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle \geq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

a)

1. $(f(x))^2 \geq 0$ für alle $x \in J := [a, b]$.

Wegen der Monotonie des Integrals ist daher

$$\langle f, f \rangle = \int_J (f(x))^2 dx \geq \int_J 0 dx = 0.$$

2.

$$\langle f, g \rangle = \int_J f(x)g(x) dx = \int_J g(x)f(x) dx = \langle g, f \rangle.$$

3.

$$\begin{aligned} \langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle &= \int_J (\alpha f_1 + \beta f_2)(x) \cdot g(x) dx \\ &= \int_J (\alpha f_1(x)g(x) + \beta f_2(x)g(x)) dx \\ &= \alpha \int_J f_1(x)g(x) dx + \beta \int_J f_2(x)g(x) dx \\ &\quad \text{(Linearität des Integrals: Satz 18.1 Kaballo)} \\ &= \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle. \end{aligned}$$

b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle \\ &= \langle f, f + \lambda g \rangle + \lambda \langle g, f + \lambda g \rangle \\ &= \langle f + \lambda g, f \rangle + \lambda \langle f + \lambda g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \lambda \langle g, f \rangle + \lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \langle g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + \lambda \langle f, g \rangle + \lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \langle g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle + 2\lambda \langle f, g \rangle + \lambda^2 \langle g, g \rangle. \end{aligned}$$

Daraus folgt für $\lambda = \pm 1$:

$$\mp 2\langle f, g \rangle \leq \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle \iff 2|\langle f, g \rangle| \leq \langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle.$$

1. Fall: $\langle f, f \rangle = \langle g, g \rangle = 0 \implies |\langle f, g \rangle| = 0$, und es ist

$$|\langle f, g \rangle|^2 = 0 \leq 0 = \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle.$$

2. Fall: $\langle f, f \rangle \neq 0$ oder $\langle g, g \rangle \neq 0$.

Wir nehmen o.B.d.A. an: $\langle g, g \rangle \neq 0$. Setze $\lambda = -\frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle}$.

$$\begin{aligned} \implies 0 &\leq \langle f, f \rangle - 2\frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} \langle f, g \rangle + \left(\frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle}\right)^2 \langle g, g \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\langle g, g \rangle} \\ \iff \frac{|\langle f, g \rangle|^2}{\langle g, g \rangle} &\leq \langle f, f \rangle \\ \iff |\langle f, g \rangle|^2 &\leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle. \end{aligned}$$

WICHTIGER HINWEIS: Anmeldung zur Klausur beim Übungsgruppenleiter (bis 21.2.2001)

- Für die Teilnehmenden der Übungsgruppen: In der Übung.
- Für die Teilnehmenden der Saalübung: In der Sprech- und Fragestunde.
- **Nicht per E-mail !**