

Lösung zur 11. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 12.4 Für die Folge $(a_n) := \left(\frac{n+(-1)^n(2n+1)}{n} \right)$ berechne man $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$.

$$a_n = 1 + (-1)^n \cdot 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$\begin{aligned} s_n &:= \sup\{a_k \mid k \geq n\} = \begin{cases} 3 + \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 3 + \frac{1}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \\ u_n &:= \inf\{a_k \mid k \geq n\} = \begin{cases} -1 - \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ -1 - \frac{1}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n &:= \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 3, \quad \text{denn } 0 \leq |s_n - 3| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &:= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -1, \quad \text{denn } 0 \leq |u_n - (-1)| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 13.2 Es seien $a \in \mathbb{R}$ und $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig; weiter existiere $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. Man zeige:

- f besitzt ein Maximum oder Minimum auf $[a, \infty)$.
- f ist gleichmäßig stetig auf $[a, \infty)$.

Sei $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und es existiere $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

(a) Setze $\ell := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

1. Fall: $f(x) = \ell$ für alle $x \in [a, \infty)$. Dann ist $\max_{x \in [a, \infty)} f(x) = \min_{x \in [a, \infty)} f(x) = \ell$.

2. Fall: Es gebe ein $c \in [a, \infty)$ mit $f(c) > \ell$.

Da $\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $f(c) - \ell > 0$ ist, gibt es ein $b_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \geq b_0$ gilt: $f(x) - \ell \leq |f(x) - \ell| \leq f(c) - \ell$, also $f(x) \leq f(c)$.

Setze $b := \max\{b_0, c\}$.

$[a, b]$ ist ein kompaktes Intervall und nach Theorem 13.1 besitzt f auf $[a, b]$ ein Maximum $\max_{x \in [a, b]} f(x)$. Es ist $c \in [a, b]$, und damit ist für alle $x > b$

$f(x) \leq f(c) \leq \max_{y \in [a, b]} f(y)$. Also ist $\max_{x \in [a, b]} f(x) = \max_{x \in [a, \infty)} f(x)$.

3. Fall: Es gebe ein $c \in [a, \infty)$ mit $f(c) < \ell$.

Da $\ell = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ und $\ell - f(c) > 0$ ist, gibt es ein $b_0 \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \geq b_0$ gilt: $\ell - f(x) \leq |\ell - f(x)| \leq \ell - f(c)$, also $f(x) \geq f(c)$.

Setze $b := \max\{b_0, c\}$.

$[a, b]$ ist ein kompaktes Intervall und nach Theorem 13.1 besitzt f auf $[a, b]$ ein Minimum $\min_{x \in [a, b]} f(x)$. Es ist $c \in [a, b]$, und damit ist für alle $x > b$

$f(x) \geq f(c) \geq \min_{y \in [a, b]} f(y)$. Also ist $\min_{x \in [a, b]} f(x) = \min_{x \in [a, \infty)} f(x)$.

- (b) Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $b > a$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $x, y \geq b$, da $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existiert. $[a, b+1]$ ist ein kompaktes Intervall und nach Satz 13.7 ist somit $f|_{[a, b+1]}$ gleichmäßig stetig. Es gibt also $0 < \delta < 1$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für $x, y \in [a, b+1]$ mit $|x - y| < \delta$. Damit ist f auf $[a, \infty)$ gleichmäßig stetig.

Aufgabe 14.2 Gegeben seien Funktionenfolgen (g_n) :

$$(2) \left(n(\sqrt[n]{x} - 1) \right) \text{ auf } (0, \infty) \qquad (4) \left(\sum_{k=0}^n x^k (1-x)^k \right) \text{ auf } (0, 1).$$

- a) Man zeige, daß diese auf allen kompakten Teilintervallen der angegebenen Intervalle gleichmäßig konvergieren.
b) Ist die Konvergenz auf den angegebenen Intervallen selbst gleichmäßig?

(2) Diese Aufgabe wird nicht gewertet.

- (4) Für $x \in]0, 1[$ ist $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{2}$. Die Folge $s_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$ konvergiert (geometrische Reihe) und ist daher eine Cauchyfolge.

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq m \geq n_0 \quad |s_n - s_m| = \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon.$$

Damit ist auch für $n \geq m \geq n_0$ und für alle $x \in]0, 1[$:

$$\left| \sum_{k=0}^n x^k (1-x)^k - \sum_{k=0}^m x^k (1-x)^k \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n x^k (1-x)^k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k < \varepsilon.$$

Nach dem Cauchy Kriterium (Kaballo 6.9) ist damit die Folge (g_n) gleichmäßig konvergent auf $]0, 1[$.

Ist eine Funktionenfolge auf einer Menge M gleichmäßig konvergent, so auch auf jeder Teilmenge von M . Also ist die Folge (g_n) auch auf jedem kompakten Teilintervall von $]0, 1[$ gleichmäßig konvergent.

Zusatz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n x^k (1-x)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (x(1-x))^k = \frac{1}{1-x(1-x)} \quad (\text{geometrische Reihe}).$$

Aufgabe 14.5 Es sei (f_n) in $\mathcal{C}(I)$ eine Folge gleichmäßig stetiger Funktionen mit $f_n \rightarrow f$ gleichmäßig. Man zeige, daß auch f gleichmäßig stetig ist. ($\mathcal{C}(I)$ bezeichnet die Menge der reellwertigen stetigen Funktionen auf dem Intervall I .)

Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist auch $\frac{\varepsilon}{3} > 0$.

Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f , also

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die Funktion f_{n_0} ist gleichmäßig stetig, also

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I \quad |x - y| < \delta \longrightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also gilt für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |(f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)) + (f_{n_0}(y) - f(y))| \\ &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt: f ist gleichmäßig stetig.

Aufgabe 17.4 Man zeige, daß monotone Funktionen $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathcal{R}(J)$ liegen, d.h. Regelfunktionen auf J sind.

Es ist die Existenz aller einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ für $a \in J$ zu zeigen, sofern sie definiert sind.

Sei f monoton wachsend. (Der andere Fall wird analog behandelt.) Sei $a \in J$ nicht der linke Randpunkt von J . Wir zeigen:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in J, x < a\} =: s.$$

Wegen der Definition von s als Supremum gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $b \in J$, $b < a$, so dass $f(b) > s - \varepsilon$.

Da f monoton wachsend ist, ist auch für alle $x \in [b, a[$ $f(x) > s - \varepsilon$, und auch $f(x) \leq s < s + \varepsilon$. Mit $\delta = a - b$ gilt also für alle $x \in J$, $|x - a| < \delta$, $x < a$: $|f(x) - s| < \varepsilon$. Also ist

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = s.$$

Analog zeigt man die Existenz der einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$, falls a nicht der rechte Randpunkt von J ist.

WICHTIGER HINWEIS: **Anmeldung zur Klausur** beim Übungsgruppenleiter (bis 21.2.2001)

- Für die Teilnehmenden der Übungsgruppen: In der Übung.
- Für die Teilnehmenden der Saalübung: In der Sprech- und Fragestunde.
- **Nicht per E-mail !**

Klausurspielregeln

- Die Klausur dauert **drei Stunden**. Sie umfaßt 7 Aufgaben. Für jede Aufgabe gibt es 10 Punkte. Mit 27 Punkten haben Sie bestanden.
- Erlaubtes Hilfsmittel ist ein **handbeschriebenes DIN A3 Blatt**. (Sie dürfen auch zwei DIN A4 Blätter zusammenkleben.) Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer deutlich auf dieses Blatt.
- Bringen Sie Papier und Schreibzeug mit. Auf jedem Blatt muß Name und Matrikelnummer stehen. Verwenden Sie für jede Aufgabe ein eigenes Blatt.
- **Nicht erlaubt** sind Taschenrechner und Handy . Ein Handy führt zum sofortigen Ausschluß von der Klausur.
- Während der Klausur werden die Taschen an den Hörsaalseiten und nicht in den Bänken aufbewahrt: bringen sie also nur das Nötigste mit.
- Halten Sie während der Klausur **Studierendenausweis und Personalausweis** bereit.
- An der Nachklausur kann nur teilnehmen, wer an der Klausur teilgenommen hat oder mit Attest entschuldigt ist. Sie können an der Nachklausur auch teilnehmen, wenn Sie die Hauptklausur bestanden haben; dann zählt die bessere Note.