

Lösung zur 10. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 9.3 Für eine Menge $M \subseteq (0, \infty)$ definiert man $M^{-1} := \{\frac{1}{x} \mid x \in M\}$ ¹. Man zeige: M^{-1} ist genau dann nach oben beschränkt, wenn $\inf M > 0$ ist, und in diesem Fall gilt $\sup M^{-1} = (\inf M)^{-1}$.

Beweis:

$$\begin{aligned} \inf M > 0 &\iff M \text{ besitzt eine untere Schranke größer als Null.} \\ &\iff \text{Es gibt ein } c > 0, \text{ so dass } c \leq x \text{ für alle } x \in M. \\ &\iff \text{Es gibt ein } c > 0, \text{ so dass } \frac{1}{x} \leq \frac{1}{c} \text{ für alle } x \in M. \\ &\iff \text{Es gibt ein } d = \frac{1}{c} > 0, \text{ so dass } x \leq d \text{ für alle } x \in M^{-1}. \\ &\iff M^{-1} \text{ ist nach oben beschränkt.} \end{aligned}$$

Wegen $x \geq \inf M$ gilt auch $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\inf M}$ für alle $x \in M$. Also ist $(\inf M)^{-1}$ eine obere Schranke für M^{-1} und damit $(\inf M)^{-1} \geq \sup M^{-1}$.

Wegen $\frac{1}{x} \leq \sup M^{-1}$ gilt auch $x \geq (\sup M^{-1})^{-1}$ für alle $x \in M$. Also ist $(\sup M^{-1})^{-1}$ eine untere Schranke für M und damit $(\sup M^{-1})^{-1} \leq \inf M \iff \sup M^{-1} \geq \inf M$.

Aufgabe 9.7 Man zeige, daß folgende Aussage zum Zwischenwertsatz äquivalent ist: Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ebenfalls ein Intervall.²

1. Es gelte der Zwischenwertsatz (Kaballo 9.7). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $a, b \in I$ und $f(a) < c < f(b)$. Dann erfüllt $f|_{[\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]}$ die Voraussetzungen des Zwischenwertsatzes. Es gibt $\xi \in]\min\{a,b\}, \max\{a,b\}[\subseteq I$ mit $f(\xi) = c$. Also ist auch $c \in f(I)$. Damit ist $f(I)$ ein Intervall nach Kaballo 9.6.
2. Sei $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. $[a, b]$ ist ein Intervall, also ist auch $f([a, b])$ ein Intervall.
Ist $f(a) < c < f(b)$ oder $f(b) < c < f(a)$, so ist $c \in f([a, b])$, d. h., es gibt ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$. Es ist sogar $\xi \in (a, b)$.

Aufgabe 9.8 Mit Hilfe des Zwischenwertsatzes beweise man: Jede stetige Abbildung $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ hat einen Fixpunkt, d. h. es gibt ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

Beweis:

Korollar zum Zwischenwertsatz: Sei $a < b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \leq c \leq f(b)$. Dann gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = c$.

Betrachte $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x - f(x)$.

¹Diese Schreibweise ist günstiger als die in der originalen Aufgabenstellung.

²Da der Zwischenwertsatz gilt, ist mit dem Beweis der genannten Aussage die logische Äquivalenz der beiden Aussagen gezeigt. Gemeint war, jeweils eine der beiden Aussagen mit Hilfe der anderen herzuleiten.

g ist stetig, da f stetig und $x \mapsto x$ stetig. Wegen $f([a, b]) \subseteq [a, b]$ gilt $f(a) \geq a$ und $f(b) \leq b$ und damit

$$g(a) = a - f(a) \leq 0 \quad \text{und} \quad g(b) = b - f(b) \geq 0.$$

Es ist also $g(a) \leq 0 \leq g(b)$. Mit dem obigen Korollar zum Zwischenwertsatz folgt, dass es ein x_0 in $[a, b]$ gibt, so dass $g(x_0) = 0$ und damit $f(x_0) = x_0$.

Aufgabe 9.12 Für $a, b \geq 0$ zeige man $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a \geq b$, also $\max\{a, b\} = a$.

1. Fall: $a = 0$. Dann ist auch $b = 0$, und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0 = a$.

2. Fall: $a > 0$. Dann ist

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{a^n \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right)} = a \cdot \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}.$$

Es ist $1 \leq 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \leq 2$, da $a \geq b$.

Wegen der Monotonie der n -ten Wurzel folgt

$$1 = \sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} \leq \sqrt[n]{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n} = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$.

Aufgabe F Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für den Logarithmus:

- | | |
|---|---|
| i) $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ | ii) $\log(a^b) = b \log(a)$ |
| iii) $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$ | iv) $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$ |

und v) $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$. Geben Sie die jeweiligen Voraussetzungen an.

1. Voraussetzung: $a, b > 0$. Dann gilt:

$$\log(a) + \log(b) = \log\left(e^{\log(a)} \cdot e^{\log(b)}\right) = \log\left(e^{\log(a) + \log(b)}\right) = \log(ab).$$

2. Voraussetzung: $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Es gilt:

$$\log(a^b) = \log\left(\left(e^{\log(a)}\right)^b\right) = \log\left(e^{b \log(a)}\right) = b \log(a).$$

3. Voraussetzung: $a, b > 0$. Dann gilt:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log\left(\frac{e^{\log(a)}}{e^{\log(b)}}\right) = \log\left(e^{\log(a)-\log(b)}\right) = \log(a) - \log(b).$$

4. Voraussetzung: $\frac{1}{a} > 0$, d. h. $a > 0$. Wegen $e^0 = 1$ gilt $\log 1 = 0$. Dann folgt die Behauptung aus Teil (iii) mit $a = 1$.

5. Voraussetzung: $a, b > 0, b \neq 1$.

$$\log_b(a) = \log_b\left(e^{\log(a)}\right) = \log_b\left(\left(e^{\log(b)}\right)^{\frac{\log(a)}{\log(b)}}\right) = \log_b\left(b^{\frac{\log(a)}{\log(b)}}\right) = \frac{\log(a)}{\log(b)}.$$