

Lösung zur 9. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe D Führen Sie den Beweis von Lemma 2.4.23 (zur Konvexität der Potenzfunktion) detailliert aus. Begründen Sie die einzelnen Schritte.

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ und $1 < x < y$.

1. **Behauptung:** Für $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$ gilt:

$$\frac{y^m - 1}{x^m - 1} < \frac{y^n - 1}{x^n - 1}.$$

Beweis:

Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$ mit $k < l$ und $0 < x < y$. Dann ist $l - k \in \mathbb{N}$ und somit $x^{l-k} < y^{l-k}$. Damit gilt

$$y^k x^l = y^k x^k x^{l-k} = (xy)^k x^{l-k} < (xy)^k y^{l-k} = x^k y^l.$$

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n$.

Dann gilt $y^k x^l < x^k y^l$ für alle $k \in \{0, \dots, m-1\}$ und alle $l \in \{m, \dots, n-1\}$. Durch Aufaddieren aller dieser Ungleichungen erhält man

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=m}^{n-1} y^k x^l < \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=m}^{n-1} x^k y^l \\ \iff & \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=m}^{n-1} y^k x^l + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{m-1} y^k x^l < \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=m}^{n-1} x^k y^l + \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=m}^{n-1} y^k x^l \\ \iff & \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} y^k x^l < \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=0}^{n-1} x^k y^l \\ \iff & \left(\sum_{k=0}^{m-1} y^k \right) \left(\sum_{l=0}^{n-1} x^l \right) < \left(\sum_{k=0}^{m-1} x^k \right) \left(\sum_{l=0}^{n-1} y^l \right) \end{aligned}$$

Für $1 < x < y$ gilt $x - 1 > 0$ und $y - 1 > 0$. Weiter gilt (geometrische Summenformel):

$$\sum_{k=0}^{m-1} y^k = \frac{y^m - 1}{y - 1}, \quad \sum_{l=0}^{n-1} x^l = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad \sum_{k=0}^{m-1} x^k = \frac{x^m - 1}{x - 1} \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^{n-1} y^l = \frac{y^n - 1}{y - 1}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \frac{(y^m - 1)(x^n - 1)}{(y - 1)(x - 1)} &= \sum_{k=0}^{m-1} y^k \sum_{l=0}^{n-1} x^l < \sum_{k=0}^{m-1} x^k \sum_{l=0}^{n-1} y^l = \frac{(x^m - 1)(y^n - 1)}{(x - 1)(y - 1)} \\ \iff (y^m - 1)(x^n - 1) &< (x^m - 1)(y^n - 1) \\ \iff \frac{y^m - 1}{x^m - 1} &< \frac{y^n - 1}{x^n - 1}. \end{aligned}$$

2. **Behauptung:** Für $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < s$ gilt

$$\frac{x^r - 1}{x^r - 1} < \frac{y^s - 1}{x^s - 1}.$$

Beweis:

Es seien $r = \frac{m}{q}$, $s = \frac{n}{q}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$.

Da die q -te Wurzel streng monoton wachsend ist, gilt nach Voraussetzung $1 < x^{\frac{1}{q}} < y^{\frac{1}{q}}$.

Aus (1) folgt nun (da $m = rq < sq = n$)

$$\frac{y^r - 1}{x^r - 1} = \frac{\left(y^{\frac{1}{q}}\right)^m - 1}{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^m - 1} < \frac{\left(y^{\frac{1}{q}}\right)^n - 1}{\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^n - 1} = \frac{y^s - 1}{x^s - 1}.$$

Damit ist also die Funktion $f : (1, \infty) \cap \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$, $r \longmapsto \frac{y^r - 1}{x^r - 1}$ streng monoton wachsend.

3. **Behauptung:** Es sei $a \in \mathbb{R}$. Für $a > 1$ gilt

$$\frac{x^a - 1}{x - 1} < \frac{y^a - 1}{y - 1}.$$

Beweis:

Die Funktion aus (2) ist streng monoton wachsend und besitzt eine stetige Fortsetzung auf $(1, \infty)$. Nach Satz 2.4.5 ist diese Fortsetzung ebenfalls streng monoton wachsend.

Für $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $0 < \rho < \sigma$ gilt also

$$\frac{y^\rho - 1}{x^\rho - 1} < \frac{y^\sigma - 1}{x^\sigma - 1}.$$

Setzt man $\rho = 1$ und $\sigma = a$, so erhält man die Behauptung.

Aufgabe E Führen Sie den Beweis von Lemma 2.4.16 (zur Konvexität der Exponentialfunktion) detailliert aus. Begründen Sie die einzelnen Schritte.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 1$.

1. **Behauptung:** Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\frac{b^n - 1}{n} < \frac{b^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Beweis:

Da $b > 1$ ist $b^n > b^k$ für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$, also gilt durch Aufsummieren dieser Ungleichungen

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^n > \sum_{k=0}^{n-1} b^k \iff n \cdot b^n > \sum_{k=0}^{n-1} b^k.$$

Damit gilt aber

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} b^k < n \cdot b^n &\iff n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} b^k < n \cdot b^n + n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} b^k \\ &\iff (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} b^k < n \cdot \sum_{k=0}^n b^k. \end{aligned}$$

Nach der geometrischen Summenformel gilt

$$\sum_{k=0}^{n-1} b^k = \frac{1-b^n}{1-b} = \frac{b^n-1}{b-1} \text{ und } \sum_{k=0}^n b^k = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$$

und damit

$$(n+1) \frac{b^n-1}{b-1} = (n+1) \sum_{k=0}^{n-1} b^k < n \sum_{k=0}^n b^k = n \frac{b^{n+1}-1}{b-1}.$$

Wegen $b-1 > 0$ ist dies äquivalent zu

$$(b^n-1)(n+1) < n(b^{n+1}-1) \iff \frac{b^n-1}{n} < \frac{b^{n+1}-1}{n+1}.$$

2. **Behauptung:** Für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $0 < r < s$ gilt

$$\frac{a^r - 1}{r} < \frac{a^s - 1}{s}.$$

Beweis:

Es seien $r = \frac{m}{q}$, $s = \frac{n}{q}$ mit $m, n, q \in \mathbb{N}$ und $b := a^{\frac{1}{q}}$.

Wegen $a > 1$ und der strengen Monotonie der q -ten Wurzel folgt $b > 1$.

Aus $r < s$ folgt mit $q \in \mathbb{N}$ auch $m = rq < sq = n$ und damit $n - m \in \mathbb{N}$.

Durch $(n - m)$ -fache Anwendung von (1) folgt damit

$$\frac{a^r - 1}{r} = \frac{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^m - 1}{\frac{m}{q}} = q \frac{b^m - 1}{m} < q \frac{b^n - 1}{n} = \frac{\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^n - 1}{\frac{n}{q}} = \frac{a^s - 1}{s}.$$

3. **Behauptung:** Für alle $r, s, t \in \mathbb{Q}$ mit $r < s < t$ gilt

$$\frac{a^s - a^r}{s - r} < \frac{a^t - a^r}{t - r}.$$

Beweis:

Für $r, s, t \in \mathbb{Q}$ folgt aus $r < s < t$ auch $s - r < t - r$ und mit (2)

$$\frac{a^s - a^r}{s - r} = a^r \frac{a^{s-r} - 1}{s - r} < a^r \frac{a^{t-r} - 1}{t - r} = \frac{a^t - a^r}{t - r}.$$

4. **Behauptung:** Die Funktion $\mathbb{Q} \ni r \mapsto a^r$ ist streng konvex.

Beweis:

Aus (3) und Lemma 2.4.11(2) folgt, dass die Funktion $r \mapsto a^r$ streng konvex ist.

Aufgabe 9.1 Man entscheide, ob folgende Mengen $M \subseteq \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimme ggf. $\sup M$ und $\inf M$. Weiter entscheide man, ob M ein Maximum oder Minimum besitzt:

- | | |
|---|--|
| (a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$ | (b) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 27\}$ |
| (c) $M = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ | (d) $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ |

- (a) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 10\}$

Es gilt

$$x \in M \iff x^2 \leq 10 \iff |x| \leq \sqrt{10} \iff -\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}.$$

Also ist M nach oben und unten beschränkt durch $\sqrt{10}$ bzw. $-\sqrt{10}$.

Analog zum Beispiel in Definition 2.4.1 (Kaballo 9.2(c)) ist $S_M = [\sqrt{10}, \infty)$ und damit $\sup M = \max M = \sqrt{10}$.

Weiter ist $S_{-M} = [\sqrt{10}, \infty)$, also $\sup -M = \sqrt{10}$. Also ist nach 2.4.3 (Kaballo 9.5) $\inf M = -\sup -M = -\sqrt{10} = \min M$.

(b) $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 < 27\}$

Es gilt $x \in M \iff x^3 < 27 \iff x < 3$ und damit $M = (-\infty, 3)$. M ist also nicht nach unten beschränkt, aber nach oben beschränkt.

Daher besitzt M kein Minimum oder Infimum. Analog zum Beispiel in Definition 2.4.1 (Kaballo 9.2(c)) $S_M = [3, \infty)$. Daraus folgt aber $\sup M = 3$. Da $3 \notin M$ ist, besitzt M kein Maximum.

(c)

Zeige zunächst (analog zu Feststellung 2.4.4, Kaballo 9.3):

Für $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann $s = \inf M$, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

1. $s \leq x$ für alle $x \in M$.
2. Es gibt eine Folge (x_n) in M , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = s$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 (1), (2) & \iff -s \geq -x \text{ für alle } x \in M, \text{ und} \\
 & \text{es gibt eine Folge } (x_n) \text{ in } M, \text{ so dass } \lim_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -s. \\
 & \iff -s \geq x \text{ für alle } x \in -M, \text{ und} \\
 & \text{es gibt eine Folge } (x_n) \text{ in } -M, \text{ so dass } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -s. \\
 & \iff -s = \sup(-M) \quad (\text{nach 2.4.4, Kaballo 9.3}) \\
 & \iff s = \inf M \quad (\text{nach 2.4.3, Kaballo 9.5})
 \end{aligned}$$

Betrachte jetzt $M = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Wegen $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 < 1 + \frac{1}{n} \leq 2$, M ist also beschränkt. Für $n = 1$ ergibt sich $1 + \frac{1}{1} = 2 \in M$ und damit nach Bemerkung 2.4.2 (Kaballo 9.2(b)) $\sup M = \max M = 2$. Da $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$, gilt mit dem oben gezeigten, dass $\inf M = 1$. Aber M besitzt kein Minimum, denn $\inf M \notin M$.

(d) $M = \{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

Es gilt $-1 \leq -\frac{1}{n} < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 < \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Daraus folgt $0 < 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{2^m} < \frac{3}{2}$, M ist also beschränkt.

Für $n = 1$ erhält man die Folge $(\frac{1}{2^m})_{m \in \mathbb{N}}$ in M , für die gilt: $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m} = 0$, und damit nach dem in Teil(c) gezeigten auch $\inf M = 0$.

Für $m = 1$ ergibt sich die Folge $(\frac{3}{2} - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}}$, für die gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} - \frac{1}{n} = \frac{3}{2}$. Mit Feststellung 2.4.4 (Kaballo 9.3) erhält man daraus $\sup M = \frac{3}{2}$. Da $\inf M \notin M$ und $\sup M \notin M$, hat M kein Minimum und kein Maximum.

Aufgabe 9.4 Man definiere $M + N := \{x + y \in \mathbb{R} \mid x \in M, y \in N\}$ für Mengen $M, N \subseteq \mathbb{R}$. Für beschränkte Mengen M, N zeige man $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$ und $\inf(M + N) = \inf M + \inf N$.

Seien also $M, N \subseteq \mathbb{R}$ beschränkte Mengen, d. h. sie sind nach unten und nach oben beschränkt. Sofern N und M zusätzlich nicht leer sind, besitzen sie ein Supremum nach Satz 2.4.5 (Kaballo 9.4) und nach Feststellung 2.4.3 (Kaballo 9.5) auch ein Infimum.

Behauptung: $\sup(M + N) = \sup M + \sup N$.

Beweis:

1. Es gilt

$$\left. \begin{array}{ll} \forall x \in M & x \leq \sup M \\ \forall y \in N & y \leq \sup N \end{array} \right\} \implies x + y \leq \sup M + \sup N,$$

also ist $\sup M + \sup N$ eine obere Schranke für $M + N$.

2. Nach Feststellung 2.4.4 (Kaballo 9.3) gilt:

Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup M$, und eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in N , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup N$.

Dann gilt aber $x_n + y_n \in M + N$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sup M + \sup N.$$

Damit ist $\sup M + \sup N$ auch die kleinste obere Schranke für $M + N$.

Behauptung: $\inf(M + N) = \inf M + \inf N$.

Beweis:

1. Es gilt

$$\left. \begin{array}{ll} \forall x \in M & \inf M \leq x \\ \forall y \in N & \inf N \leq y \end{array} \right\} \implies \inf M + \inf N \leq x + y,$$

also ist $\inf M + \inf N$ eine untere Schranke für $M + N$.

2. Nach Feststellung 2.4.4 (Kaballo 9.3) gilt:

Es gibt eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in M , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf M$, und eine Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in N , so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf N$.

Dann gilt aber $x_n + y_n \in M + N$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \inf M + \inf N.$$

Damit ist $\inf M + \inf N$ auch die größte untere Schranke für $M + N$.

Aufgabe 9.5 Die Funktionen $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ seien nach oben beschränkt. Man zeige, daß auch $f + g$ nach oben beschränkt ist und daß $\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M)$ gilt. Man gebe ein Beispiel an, bei dem „ $<$ “ auftritt.

Seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ nach oben beschränkt, d.h. $f(M), g(M)$ sind nach oben beschränkt.

Also gilt für alle $x \in M$: $f(x) \leq \sup f(M)$, $g(x) \leq \sup g(M)$. Damit ist

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq \sup f(M) + g(x) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

Also ist $\sup f(M) + \sup g(M)$ eine obere Schranke von $(f + g)(M)$ und daher

$$\sup(f + g)(M) \leq \sup f(M) + \sup g(M).$$

Beispiel für die strikte Ungleichung: Sei $M = [0, 1]$.

Betrachte $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - x$.

Wegen $f(x) = 1 - x \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$ und $f(0) = 1$ gilt $\sup f(M) = 1$.

Sei weiter $g : M \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

Da $g(x) = x \leq 1$ für alle $x \in [0, 1]$ und $g(1) = 1$ gilt $\sup g(M) = 1$.

Dann ist $(f + g)(x) = 1 - x + x = 1$ für alle $x \in [0, 1] \implies \sup(f + g)(M) = 1$.

Damit gilt also

$$\sup(f + g)(M) = 1 < 2 = \sup f(M) + \sup g(M).$$