

Lösung zur 8. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 8.3 Bekanntlich ist auf $\mathbb{R}$ die DIRICHLET-Funktion D durch

$$D(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

definiert. In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $x \mapsto D(x) \cdot (x^2 - 1)$ stetig?

Behauptung: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto D(x) \cdot (x^2 - 1)$ ist nur in den Punkten -1 und 1 stetig.

Beweis: (1.Variante) Aus $|D(x)| \leq 1$ folgt $|D(x)(x^2 - 1)| \leq |x^2 - 1|$ und damit $\lim_{x \rightarrow \pm 1} D(x)(x^2 - 1) = 0$ (Einsperrregel). Sei nun $x_0 \neq \pm 1$. Dann ist $x_0^2 - 1 \neq 0$. Wäre $D(x)(x^2 - 1)$ stetig in x_0 , dann wäre auch $D(x) = \frac{1}{x^2 - 1} D(x)(x^2 - 1)$ (als Produkt stetiger Funktionen) stetig in x_0 . Dem ist nicht so. Widerspruch!

Beweis: (2.Variante)

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ hat die Nullstellen -1 und +1 und ist als Polynom stetig auf ganz $\mathbb{R}$. Auch f hat also in -1 und +1 Nullstellen. Weiter gilt $|D(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$.

- Sei $x = -1$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - (-1)| = |y + 1| < \delta$ gilt: $|(y^2 - 1) - 0| = |y^2 - 1| < \varepsilon$
 $\implies |f(y) - 0| = |D(y) \cdot (y^2 - 1)| = |D(y)| \cdot |y^2 - 1| \leq |y^2 - 1| < \varepsilon$.

Also ist f stetig in -1.

- Sei $x = +1$. Es existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - 1| < \delta$ gilt: $|y^2 - 1| < \varepsilon$
 $\implies |f(y)| = |D(y) \cdot (y^2 - 1)| = |D(y)| \cdot |y^2 - 1| \leq |y^2 - 1| < \varepsilon$.

Damit ist f auch in +1 stetig.

- Sei $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$. Dann ist $D(x) = 1$ und $f(x) = x^2 - 1 = d \neq 0$. Nach Satz 6.23 gibt es für alle $\delta > 0$ ein $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass $|y - x| < \delta$. Es gilt also $D(y) = f(y) = 0$, und damit ist $|f(y) - f(x)| = |0 - f(x)| = |d|$. Für $0 < \varepsilon < |d|$ gibt es also kein $\delta > 0$, so dass für alle y mit $|y - x| < \delta$ gilt: $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.
 f ist also nicht stetig in allen $x \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$.
- Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Setze $g(x) = x^2 - 1$ und $d = |g(x)| = |x^2 - 1| \neq 0$. Es gibt ein $\delta_0 > 0$, so dass für alle y mit $|x - y| < \delta_0$ gilt: $|g(x) - g(y)| < \frac{d}{2}$. Wähle $\varepsilon = \frac{d}{2}$. Für alle $\delta > 0$ gibt es ein $y \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, 1\}$ mit $|x - y| < \min\{\delta, \delta_0\}$. Dann ist

$$|f(x) - f(y)| = |g(y)| \geq |g(x)| - |g(x) - g(y)| > d - \frac{d}{2} = \frac{d}{2} = \varepsilon.$$

Also gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $\delta > 0$ ein y gibt mit $|x - y| < \delta$, aber $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

Damit ist f nicht stetig in x .

Der Beweis der Stetigkeit in -1 und 1 lässt sich auch anders formulieren:

Wegen $|D(x)| \leq 1$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$0 \leq |D(x)(x^2 - 1)| \leq |x^2 - 1|,$$

und wegen $\lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 1 = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1 = 0$ folgt mit dem Einsperrsatz

$$\lim_{x \rightarrow -1} D(x)(x^2 - 1) = 0 = D(-1)((-1)^2 - 1) \quad \text{und}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} D(x)(x^2 - 1) = 0 = D(1)(1^2 - 1).$$

Aufgabe 8.9 Man konstruiere eine monotone Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit unendlich vielen Unstetigkeitsstellen. (D.h. eine mit einer Folge paarweise disjunkter Unstetigkeitsstellen.) Gibt es auch eine streng monotone Funktion mit dieser Eigenschaft?

Betrachte $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } x \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right] \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$ für ein $n \in \mathbb{N}$

- Seien $x, y \in [0, 1]$, so dass $x < y$. Dann gibt es ein $n_y \in \mathbb{N}$, so dass $y \in \left(\frac{1}{n_y+1}, \frac{1}{n_y}\right]$ gilt.

Falls $x = 0$, so gilt $f(x) = 0 \leq \frac{1}{n_y} = f(y)$.

Falls $x > 0$, so gibt es auch ein $n_x \in \mathbb{N}$, so dass $x \in \left(\frac{1}{n_x+1}, \frac{1}{n_x}\right]$ gilt. Da $x < y$ vorausgesetzt war, folgt $n_x \geq n_y$ und damit $f(x) = \frac{1}{n_x} \leq \frac{1}{n_y} = f(y)$.

Somit ist f monoton wachsend.

- f ist unstetig in $\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, denn

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^-} f(x) = \frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{1}{n}\right)^+} f(x) = \frac{1}{n-1} \neq \frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Damit erfüllt f die gewünschten Eigenschaften.

Auf ähnlichem Wege kann man auch eine streng monotone Funktion konstruieren, die unendlich viele Unstetigkeitsstellen hat.

Betrachte dazu $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x + f(x)$.

- Strenge Monotonie: Seien $x, y \in [0, 1]$, $x < y$. Da f monoton wachsend ist, gilt

$$g(x) = x + f(x) \leq x + f(y) < y + f(y) = g(y).$$

- g ist unstetig in $\frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^-} g(x) = \frac{2}{n} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{n})^+} g(x) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}.$$

Aufgabe 21.2 Sind Summen bzw. Produkte konvexer Funktionen wieder konvexe Funktionen?

Seien f, g konvex, $x, y \in \mathbb{R}$ und $t \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} f((1-t)x + ty) &\leq (1-t)f(x) + tf(y) \\ g((1-t)x + ty) &\leq (1-t)g(x) + tg(y). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} (f+g)((1-t)x + ty) &= f((1-t)x + ty) + g((1-t)x + ty) \\ &\leq (1-t)f(x) + tf(y) + (1-t)g(x) + tg(y) \\ &= (1-t)(f+g)(x) + t(f+g)(y). \end{aligned}$$

Damit sind Summen konvexer Funktionen wieder konvex.

Für Produkte gilt dies nicht i. allg.

Beweis: Durch Gegenbeispiel.

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -1$ ist konvex, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$f((1-t)x + ty) = -1 = (1-t) \cdot (-1) + t \cdot (-1).$$

$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist ebenfalls konvex, denn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und alle $t \in [0, 1]$ gilt

$$\begin{aligned} g((1-t)x + ty) &= (1-t)^2 x^2 + 2(1-t)xy + t^2 y^2 \\ &= x^2 - 2tx^2 + t^2 x^2 + t^2 y^2 + 2(1-t)xy \\ &= (1-t)x^2 + ty^2 - tx^2 - ty^2 + t^2 x^2 + t^2 y^2 + 2(1-t)txy \\ &= (1-t)g(x) + tg(y) + (t^2 - t)(x^2 + y^2) - 2t(t-1)xy \\ &= (1-t)g(x) + tg(y) + t(t-1)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &\leq (1-t)g(x) + tg(y) \quad \text{denn } t(t-1) \leq 0 \text{ und } (x-y)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Dies kann man auch mit Korollar 2.3.42 zeigen.

$f \cdot g$ ist jedoch nicht konvex. Seien dazu $x = -1, y = 1$ und $t = \frac{1}{2}$. Es gilt $(f \cdot g)(x) = -x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (f \cdot g)((1-t)x + ty) &= -\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \\ (1-t)(f \cdot g)(x) + t(f \cdot g)(y) &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 < 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 21.3 a) Es seien $f : I \rightarrow J$ konvex und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend. Man zeige, daß $g \circ f$ konvex ist. Gilt dies auch, wenn g nicht monoton wachsend ist?

Sei f konvex, d. h. für alle $x, y \in I$ und alle $t \in [0, 1]$ gelte:

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Sei g konvex, d. h. für alle $x, y \in J$ und alle $t \in [0, 1]$ gelte:

$$g((1-t)x + ty) \leq (1-t)g(x) + tg(y).$$

Sei g weiter g monoton wachsend, d. h. für alle $x, y \in J$ mit $x < y$ gelte $g(x) \leq g(y)$.

Damit gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)((1-t)x + ty) &= g(f((1-t)x + ty)) \\ &\leq g((1-t)f(x) + tf(y)) && \text{da } f \text{ konvex und } g \text{ mon. wachsend} \\ &\leq (1-t)g(f(x)) + tg(f(y)) && \text{da } g \text{ konvex} \\ &= (1-t)(g \circ f)(x) + t(g \circ f)(y), \end{aligned}$$

$g \circ f$ ist also konvex.

Die Bedingung des monotonen Wachstums von g ist notwendig.

Beweis: Durch Gegenbeispiel.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ist konvex (s. Aufgabe 21.2).

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -x$ ist nicht monoton wachsend, aber konvex, denn

$$g((1-t)x + ty) = -((1-t)x + ty) = -(1-t)x - ty = (1-t)(-x) + t(-y).$$

Es gilt $(g \circ f)(x) = -x^2$, also ist $g \circ f$ nicht konvex (s. Aufgabe 21.2).

Aufgabe B Man zeige: $f: x \mapsto \sqrt{x}$ ist nicht LIPSCHITZ-stetig auf $[0, \infty)$.

Sei $L > 0$. Wähle $x = \frac{1}{4L^2}, y = 0$.

$$|f(x) - f(y)| = \left| \sqrt{\frac{1}{4L^2}} - \sqrt{0} \right| = \frac{1}{2L} > \frac{1}{4L} = L|x - y|.$$

Also gibt es kein $L > 0$, so dass für alle $x, y \in [0, \infty)$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Aufgabe C Man zeige: Für $x, y \in [0, \infty)$ gilt $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$.

Fallunterscheidung:

1. Fall: Sei $y \leq x$.

Dann gilt:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - 2\sqrt{yy} + y = x - y = |x - y|,$$

$$\text{also } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

2. Fall: Sei $x \leq y$.

Dann gilt:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 = x - 2\sqrt{xy} + y \leq x - 2\sqrt{xx} + y = y - x = |x - y|,$$

$$\text{also } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}.$$