

Lösung zur 7. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 6.5 Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gelte die Bedingung:

$$\exists C > 0, \ell \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq \ell : |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{C}{n^2}.$$

Man zeige die Konvergenz von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis:

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist konvergent} \implies \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

Also gibt es für alle $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n > n_0$ gilt:

$$\left| \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \right| = \left| \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2} < \delta.$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Nach Voraussetzung gibt es dann ein $C > 0$ und ein $\ell \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq \ell$ gilt:
 $|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{C}{n^2}.$

Nun ist auch $\frac{\varepsilon}{C} > 0$. Also gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n > n_0$ gilt: $\sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2} < \frac{\varepsilon}{C}.$

Damit gilt für $m > n \geq \max\{n_0, \ell\}$

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - \dots - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \\ &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} a_{k+1} - a_k \right| \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} |a_{k+1} - a_k| && \text{mit der Dreiecksungleichung} \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{C}{k^2} && \text{nach Voraussetzung} \\ &= C \cdot \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k^2} \\ &\leq C \cdot \frac{\varepsilon}{C} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine reelle Cauchy-Folge und, da $\mathbb{R}$ vollständig ist, somit auch konvergent.

Aufgabe 6.7 Für $a > 0$ setze man $x_1 := 2a$ und rekursiv $x_{n+1} := 2a + \frac{1}{x_n}$. Man zeige die Konvergenz der Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und bestimme ihren Grenzwert.

Aus $x_1 = 2a > 0$ folgt induktiv, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $x_n \geq 2a > 0$.
Damit gilt auch

$$x_{n+1} \cdot x_n = \left(2a + \frac{1}{x_n}\right) \cdot x_n = 2a \cdot x_n + 1 \geq 1.$$

Falls die Folge konvergiert, gilt für den Grenzwert

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2a + \frac{1}{x_n}\right) = 2a + \frac{1}{x}.$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n \geq 2a$, so gilt auch $x \geq 2a$. Damit lässt sich x berechnen:

$$\begin{aligned} x = 2a + \frac{1}{x} &\iff \frac{1}{x} = x - 2a \\ &\iff x(x - 2a) = 1 \\ &\iff x^2 - 2ax = 1 \\ &\iff x^2 - 2ax + a^2 = 1 + a^2 \\ &\iff (x - a)^2 = 1 + a^2 \\ &\iff x - a = \sqrt{a^2 + 1} \quad \text{denn } x \geq 2a \implies x - a \geq a > 0 \\ &\iff x = a + \sqrt{a^2 + 1} \end{aligned}$$

Definiere nun für alle $n \in \mathbb{N}$ d_n als den Abstand des n-ten Folgengliedes zu x :

$$d_n := |x - x_n|.$$

Damit ergibt sich für ein $n \in \mathbb{N}$

$$d_{n+1} = |x - x_{n+1}| = \left|2a + \frac{1}{x} - 2a - \frac{1}{x_n}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_n}\right| = \left|\frac{x_n - x}{xx_n}\right| = \frac{|x - x_n|}{xx_n} = \frac{d_n}{xx_n}$$

Analog erhält man also auch $d_n = \frac{d_{n-1}}{xx_{n-1}}$, und wegen $x_n x_{n-1} \geq 1$ (s. o.) erhält man

$$d_{n+1} = d_n \cdot \frac{1}{xx_n} = \frac{d_{n-1}}{x^2 x_n x_{n-1}} \leq \frac{d_{n-1}}{x^2}.$$

Durch erneutes Anwenden dieser Abschätzung ergibt sich

$$\frac{d_{n-1}}{x^2} = \frac{d_{n-2}}{x^3 x_{n-2}} = \frac{d_{n-3}}{x^4 x_{n-2} x_{n-3}} \leq \frac{d_{n-3}}{x^4}.$$

Iterativ gewinnt man so

$$d_{n+1} \leq \begin{cases} \frac{d_1}{x_1} \cdot \frac{1}{x^n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ d_1 \cdot \frac{1}{x^n} & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}.$$

In beiden Fällen ist also der Vorfaktor nicht von n abhängig, schreibe daher $d_{n+1} \leq \frac{c}{x^n}$, wobei $c := \max \left\{ \frac{d_1}{x_1}, d_1 \right\}$. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq d_n \leq \frac{c}{x^n}.$$

Da $x > 1$, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{x^n} = 0$, und mit der Einsperregel folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} |x - x_n| = 0$. Damit konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x .

Aufgabe 8.1 Man berechne die Grenzwerte

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}}$

a) Z.B. mit Polynomdivision erhält man

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} = \frac{(x^2 - 4x + 4)(x - 2)}{x - 2} = x^2 - 4x + 4.$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 4x + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$ gilt dann auch $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x - 2} = 0$.

b) Es gilt

$$\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}} = \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot \frac{x^4}{x^4} = \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 1}.$$

Damit gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^4 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + x^2}{x^4 + 1} = 0 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^4}} = 0.$$

Aufgabe 8.1 Man berechne die Grenzwerte

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+7)^2 \cdot \sqrt{x+2}}{7x^2 \sqrt{x-2x}\sqrt{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x)$

c) Zunächst gilt

$$\frac{(x+7)^2 \cdot \sqrt{x+2}}{7x^2 \sqrt{x} - 2x \sqrt{x}} = \frac{x^2 \left(1 + \frac{7}{x}\right)^2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x^2 \sqrt{x} \left(7 - \frac{2}{x}\right)} = \frac{\left(1 + \frac{7}{x}\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{7 - \frac{2}{x}}.$$

Es gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, und daraus folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 7 - \frac{2}{x} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{2}{x} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{1} = 1 \quad (\text{nach Satz 6.18})$$

Da der Nenner $7 - \frac{2}{x}$ für alle $x > \frac{2}{7}$ ungleich 0 ist, folgt daraus mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+7)^2 \sqrt{x+2}}{7x^2 \sqrt{x} - 2x \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{7}{x}\right)^2 \cdot \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{7 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{7}.$$

d) Zunächst gilt

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x^2 + 3x + 1} - x\right) &= \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} \\ &= \frac{3x + 1}{\sqrt{x^2 + 3x + 1} + x} \\ &= \frac{x \left(3 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1\right)} \\ &= \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} 3 + \frac{1}{x} = 3$ und

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 1 &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{1} = 1 \\ &\implies \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 = 2. \end{aligned}$$

Also gilt mit den Rechenregeln für Grenzwerte (da der Nenner für alle $x \in \mathbb{R}$ grösser als 0 ist)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{3}{2}.$$

Aufgabe 5.A Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0$. Man zeige, daß

$$\left((a_n + 1)^{\frac{1}{a_n}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert und bestimme den Grenzwert.

Siehe dazu die Musterlösung zu Aufgabe 5 der Probeklausur.