

Lösung zur 6. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 6.1 Für $n \in \mathbb{N}$ gilt die Abschätzung

$$e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Man gebe einen Induktionsbeweis.

Beweis:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt:

$$e \left(\frac{1}{e}\right)^1 = \frac{e}{e} = 1 \leq 1 = 1! \leq 1 = 1 \frac{e}{e} = e \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^1.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $e \left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Induktionsschritt: Zu zeigen: $e \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1} \leq (n+1)! \leq e(n+1) \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (1)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \geq (n+1) \cdot e \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &\geq (n+1) \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{mit (1)} \\ &= (n+1) \frac{n^n}{e^n} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \\ &= \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \cdot e \\ &= e \cdot \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (n+1)! &= n! \cdot (n+1) \leq e n \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \frac{n^{n+1}}{e^n} (n+1) \quad \text{mit (1)} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \frac{n^{n+1}}{e^n} (n+1) \\ &= e (n+1) \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6.2 Man berechne die arithmetischen und geometrischen Mittel der Zahlen $e \left(\frac{n}{e}\right)^n$ und $e n \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Welches dieser Mittel liefert eine bessere Approximation für $n!$?
 Zur Erinnerung: das arithmetische Mittel zweier Zahlen x, y ist gegeben durch $\frac{x+y}{2}$, das geometrische Mittel zweier Zahlen $x, y \geq 0$ durch $\sqrt{xy}$.

Das arithmetische Mittel lautet

$$\frac{e \left(\frac{n}{e}\right)^n + e n \left(\frac{n}{e}\right)^n}{2} = \frac{n+1}{2} e \left(\frac{n}{e}\right)^n ,$$

das geometrische Mittel

$$\sqrt{e \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot e n \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{n e^2 \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

Aufgabe 6.4 Es sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $|a_{n+1} - a_n| \rightarrow 0$. Folgt daraus die Konvergenz von (a_n) ?

Behauptung: Daraus folgt nicht i. allg. die Konvergenz von (a_n) .

Beweis durch Gegenbeispiel:

Konstruiere eine Folge, für die gilt:

$$\left. \begin{array}{l} |a_2 - a_1| = 1 \\ |a_3 - a_2| = \frac{1}{2} \\ |a_4 - a_3| = \frac{1}{2} \\ |a_5 - a_4| = \frac{1}{4} \\ |a_6 - a_5| = \frac{1}{4} \\ |a_7 - a_6| = \frac{1}{4} \\ |a_8 - a_7| = \frac{1}{4} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{einmal} \\ \text{zweimal} \\ \text{viermal} \end{array}$$

$\vdots$

$$\left. \begin{array}{l} |a_{2^m+1} - a_{2^m}| = \frac{1}{2^m} \\ \vdots \\ |a_{2^{m+1}} - a_{2^{m+1}-1}| = \frac{1}{2^m} \end{array} \right\} 2^m \text{mal}$$

Verlange zusätzlich $0 \leq a_n \leq 1$, also die Beschränktheit der Folge.

Starte mit $a_1 = 0, a_2 = 1$. Dann folgt

$$\begin{array}{lcl} |a_2 - a_1| = |1 - 0| = 1 \\ |a_3 - a_2| = |a_3 - 1| = \frac{1}{2} \implies a_3 = \frac{1}{2}, \text{ denn } \frac{3}{2} \notin [0, 1]. \\ |a_4 - a_3| = |a_4 - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2} \implies a_4 = 0 \text{ oder } a_4 = 1. \text{ Setze } a_4 = 0. \\ |a_5 - a_4| = |a_5| = \frac{1}{4} \implies a_5 = \frac{1}{4} \\ \vdots \end{array}$$

Analog fährt man fort und wählt die a_i so, dass sie einmal von 0 nach 1 aufsteigen und dann wieder auf 0 fallen.

Dies führt auf die im Hinweis (Kaballo) angegebene Folge

$$0, 1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \dots,$$

oder formal:

Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein $k \in \{0, \dots, 2^m - 1\}$, so dass $2^m \leq n < 2^{m+1}$ und $n = 2^m + k$. Damit ist

$$a_n = \begin{cases} k \cdot \frac{1}{2^m} & , \text{ falls } m \text{ gerade} \\ 1 - k \cdot \frac{1}{2^m} & , \text{ falls } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Nach Definition ist diese Folge beschränkt (beachte den Wertebereich von k).

Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}_0$ und ein k wie oben. Fallunterscheidung:

1. Sei $k \in \{0, \dots, 2^m - 2\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \begin{cases} \left| (k+1) \frac{1}{2^m} - k \cdot \frac{1}{2^m} \right| & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \left| 1 - (k+1) \frac{1}{2^m} - (1 - k \cdot \frac{1}{2^m}) \right| & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \left| \frac{1}{2^m} \right|. \end{aligned}$$

2. Sei $k = 2^m - 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \begin{cases} \left| 1 - k \cdot \frac{1}{2^m} \right| & = \left| \frac{2^m - (2^m - 1)}{2^m} \right| & \text{falls } m \text{ gerade} \\ \left| 0 - (1 - k \cdot \frac{1}{2^m}) \right| & = \left| \frac{-2^m + (2^m - 1)}{2^m} \right| & \text{falls } m \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= \left| \frac{1}{2^m} \right|. \end{aligned}$$

Es gilt also wie gefordert $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1} - a_n| = 0$.

Weiter gilt aber

$$a_{2^i} = \begin{cases} 0, & \text{falls } i \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases} \implies |a_{2^i} - a_{2^{i+1}}| = 1 \text{ für alle } i \in \mathbb{N}.$$

Damit ist die Folge nicht konvergent.

Aufgabe 6.8 Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. die Grenzwerte.

$$\text{a) } \sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} - n^2 \text{ für } a, b, c \geq 0 \quad \text{c) } \frac{3n^2 + \sqrt{n3^n}}{2^n} \quad \text{d) } \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$$

a)

$$\begin{aligned}
\sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} - n^2 &= \frac{\left(\sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} - n^2\right) \left(\sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} + n^2\right)}{\sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} + n^2} \\
&= \frac{n^4 + an^3 + bn^2 + cn - n^4}{\sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} + n^2} \\
&= \frac{an^3 + bn^2 + cn}{\sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} + n^2} \\
&= \frac{n^2 \cdot \left(an + b + \frac{c}{n}\right)}{\sqrt{n^4 \cdot \left(1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}\right)} + n^2} \\
&= \frac{n^2 \cdot \left(an + b + \frac{c}{n}\right)}{n^2 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}} + 1\right)} \\
&= \frac{an + b + \frac{c}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}} + 1}
\end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall: $a = 0$

Da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^3} = 0$ gilt, folgt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}\right) = 1$ und

(mit Satz 6.18) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}} = 1$.

Damit gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} - n^2\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{c}{n}}{\sqrt{1 + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3}} + 1} = \frac{b}{2}.$$

2. Fall: $a \neq 0$

Nach den Rechenregeln für Grenzwerte gilt in diesem Fall

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^4 + an^3 + bn^2 + cn} - n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2} + \frac{a}{n^3} + \frac{b}{n^4} + \frac{c}{n^5}} + \frac{1}{n}} = \infty.$$

c)

Zunächst gilt $\frac{3n^2 + \sqrt{n \cdot 3^n}}{2^n} = \frac{3n^2}{2^n} + \frac{\sqrt{n \cdot 3^n}}{2^n}$.

Mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ und Beispiel 5.7(c) gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \frac{n^2}{2^n} = 0$.

Für den zweiten Term ergibt sich

$$\frac{\sqrt{n \cdot 3^n}}{2^n} = \sqrt{\frac{n \cdot 3^n}{(2^n)^2}} = \sqrt{\frac{n \cdot 3^n}{2^{2n}}} = \sqrt{\frac{n \cdot 3^n}{(2^2)^n}} = \sqrt{n \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

Nach Beispiel 5.7(c) gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, und mit Satz 6.18 folgt dann daraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n \cdot 3^n}}{2^n} = 0.$$

Mit den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich also insgesamt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + \sqrt{n \cdot 3^n}}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n \cdot 3^n}}{2^n} = 0 + 0 = 0 \quad .$$

d)

Es gilt nach Satz 6.18: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.

Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ folgt damit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n}} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ und mit nochmaliger

Anwendung der gleichen Regel folgt daraus $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{n}}}$.

Aufgabe 6.8 Man untersuche die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimme ggf. die Grenzwerte.

e) $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

f) $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

e)

Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $2^{m-1} \leq n < 2^m$. Bezeichne dieses m mit $\ell(n)$. Dann gilt

$$0 \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \leq \frac{(\ell(n))^2}{2^{\ell(n)-1}} \quad (\text{s. Musterlösung zu Aufgabe 4.5.})$$

Nach Bemerkung 5.14 ist $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{m^2}{2^{m-1}} = \lim_{m \rightarrow \infty} 2 \cdot \frac{m^2}{2^m} = 0$,

d. h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m \geq m_0 \quad \frac{m^2}{2^{m-1}} = \left| \frac{m^2}{2^{m-1}} \right| < \varepsilon$.

Sei $\varepsilon > 0$. Setze $n_0 = 2^{m_0}$. Für $n \geq n_0$ ist dann $\ell(n) \geq m_0$, und daher

$$\left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \right| = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \leq \frac{(\ell(n))^2}{2^{\ell(n)-1}} < \varepsilon \quad .$$

Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 = 0$, und daher nach Satz 6.18 auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0 \quad .$$

f)

Es ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$,

d. h. $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \varepsilon$.

Ist $n \geq n_0$, so ist auch $2n \geq n_0$. Also gilt auch: $\forall n \geq n_0 \quad \left| \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} - e \right| < \varepsilon$.

Das heißt, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$.

Daraus folgt nach Satz 6.18 (Kaballo)

$$\sqrt{e} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n.$$