

Lösung zur 5. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 5.1 Man untersuche die angegebenen Folgen (a_n) auf Konvergenz und bestimme ggf. die Grenzwerte:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & a_n = \frac{4n^3 - (-1)^n n^2}{5n + 2n^3} \\ \text{b)} & a_n = \frac{3n^4 + n^n}{5^n + 4^n n!} \\ \text{c)} & a_n = \frac{2^{n^3}}{n! 5^{n^2} + n^n} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{d)} } a_n = \frac{(n^3 - 5n)^4 - n^{12}}{n^{11}} \\ \text{e)} } a_n = \frac{1}{h_n} \text{ mit } h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \end{array}$$

1. **Behauptung:** Die Folge $a_n = \frac{4n^3 - (-1)^n n^2}{5n + 2n^3}$ konvergiert gegen 2.

Beweis: Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \cdot \frac{1}{n}) = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Daraus folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - (-1)^n n^2}{5n + 2n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(4 - (-1)^n \cdot \frac{1}{n})}{n^3(2 + \frac{5}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - (-1)^n \cdot \frac{1}{n}}{2 + \frac{5}{n^2}} \\ &= \frac{4 - \lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n \cdot \frac{1}{n})}{2 + 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{4 - 0}{2 + 0} = 2. \end{aligned}$$

2. **Behauptung:** Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{3n^4 + n^n}{5^n + 4^n n!}$ konvergiert gegen 0.

Beweis: Nach Bemerkung 2.1.22 gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n^n} = 0$. Nach Satz 1.5.6 gilt $3 \left(\frac{n}{3}\right)^n \leq n!$. Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n n!}{n^n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n \cdot 3 \left(\frac{n}{3}\right)^n}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 4^n}{3^n} = \infty.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + n^n}{5^n + 4^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n \left(\frac{3n^4}{n^n} + 1\right)}{n^n \left(\frac{5^n}{n^n} + \frac{4^n n!}{n^n}\right)} = 0.$$

3. **Behauptung:** Die Folge (a_n) , $a_n = \frac{2^{n^3}}{n! 5^{n^2} + n^n}$ ist divergent gegen ∞ .

Beweis: Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{2^{n^3}} = 0$ nach Bemerkung 2.1.22. Weiter gilt $2^{n^3} \geq 2^{n^2}$.

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! 5^{n^2}}{2^{n^3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! 5^{n^2}}{2^{n^2} \cdot (2^{n-1})^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{2^{n^2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2^{n-1}}\right)^{n^2} = 0,$$

da $\left(\frac{5}{2^{n-1}}\right)^n \leq \frac{5}{8} < 1$ für $n \geq 4$.

Daher gilt mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^3}}{n! 5^{n^2} + n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n^3}}{2^{n^3} \cdot \left(\frac{n! 5^{n^2}}{2^{n^3}} + \frac{n^n}{2^{n^3}}\right)} = \infty.$$

4. **Behauptung:** Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{(n^3-5n)^4 - n^{12}}{n^{11}}$ konvergiert gegen 0.

Beweis: Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^7} = 0$. Daraus folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 - 5n)^4 - n^{12}}{n^{11}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{12} - 20n^{10} + 6n^6 \cdot 25n^2 - 4n^3 \cdot 125n^3 + 625n^4 - n^{12}}{n^{11}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-20n^{10} + 150n^8 - 500n^6 + 625n^4}{n^{11}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{11}(-20\frac{1}{n} + 150\frac{1}{n^3} - 500\frac{1}{n^5} + 625\frac{1}{n^7})}{n^{11}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-20}{n} + \frac{150}{n^3} - \frac{500}{n^5} + \frac{625}{n^7} \right) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

5. **Behauptung:** Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{1}{h_n}$ und $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ konvergiert gegen 0.

Beweis: Wegen $h_n \geq 0$ gilt $|a_n| = |\frac{1}{h_n}| = \frac{1}{h_n} = a_n$.

$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_n$ divergiert gegen $+\infty$,

d. h. für alle $C \in (0, \infty)$ gilt: Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > C$ für alle $n \geq n_0$.

Damit ist aber $a_n = \frac{1}{h_n} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} < \frac{1}{C}$.

Da $C > 0$ beliebig war, gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_n = \frac{1}{h_n} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ gilt.

Die Folge konvergiert also gegen 0.

Aufgabe 5.2 Für festes $k \in \mathbb{N}$ zeige man $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \binom{n}{k} = 0$.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^{-n} \binom{n}{k} \geq 0$.

Weiter gilt (vgl. Aufgabe 4.6., Teil (4))

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq \prod_{j=n-k+1}^n j \leq \prod_{j=n-k+1}^n n = \prod_{j=1}^k n = n^k .$$

Es gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq 2^{-n} \binom{n}{k} \leq 2^{-n} n^k .$$

Daraus und aus $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ folgt mit der Einsperregel 2.1.14:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} \binom{n}{k} = 0 \quad .$$

Aufgabe 5.7 Man berechne die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{k=1}^n k$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3} \sum_{k=1}^n k^2$.

1. **ges. :** $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{k=1}^n k \quad .$

Nach Aufgabe 2.3. gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$. Daraus folgt

$$n^{-2} \sum_{k=1}^n k = n^{-2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n^2(1 + \frac{1}{n})}{2n^2} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad .$$

Also folgt aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 = 2 \neq 0$ und aus den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-2} \sum_{k=1}^n k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1 + 0}{2} = \frac{1}{2} \quad .$$

2. **ges. :** $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3} \sum_{k=1}^n k^2 \quad .$

Nach Aufgabe 2.3. gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} n^{-3} \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{n(2n^2 + 2n + n + 1)}{6n^3} \\ &= \frac{2n^2 + 3n + 1}{6n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \quad . \end{aligned}$$

Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6n^2} = 0$ folgt mit den Rechenregeln für Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-3} \sum_{k=1}^n k^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{1}{3} + 0 + 0 = \frac{1}{3} \quad .$$

Aufgabe 5.3 Es seien (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Man zeige, dass auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge ist.

Beweis:

(a_n) ist eine Nullfolge, d. h.

für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n| < \varepsilon$.

(b_n) ist beschränkt, d. h.

es gibt ein $B \in \mathbb{R}$, so dass $|b_n| \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt $\frac{\varepsilon}{B} > 0$ und damit existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:
 $|a_n| < \frac{\varepsilon}{B}$.

Daraus folgt für $n \geq n_0$

$$|a_n b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq |a_n| \cdot B \leq \frac{\varepsilon}{B} \cdot B = \varepsilon ,$$

und damit ist auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge.

Aufgabe 5.9 Es sei (b_n) eine streng monoton wachsende Folge mit $(b_n) \rightarrow \infty$. Es sei (a_n) eine weitere Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \ell.$$

Man beweise, dass dann auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$$

gilt. (Beachten Sie dazu auch den Hinweis in KABALLO auf S. 47.)

Sei $c_n := a_n - a_{n-1}$ und $d_n := b_n - b_{n-1}$. Dann gilt für $n \geq m > 1$:

$$\sum_{i=m}^n (a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=m}^n a_i - \sum_{i=m}^n a_{i-1} = \sum_{i=m}^n a_i - \sum_{i=m-1}^{n-1} a_i = a_n - a_{m-1} , \quad (1)$$

und analog $\sum_{i=m}^n d_i = b_n - b_{m-1}$.

Zu zeigen ist: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$,

d. h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| < \varepsilon.$$

Sei $\varepsilon > 0$.

Dann gibt es nach Voraussetzung ein $\tilde{n}_0$, so dass für alle $n \geq \tilde{n}_0$ gilt: $\left| \frac{c_n}{d_n} - \ell \right| < \frac{\varepsilon}{2}$,
also $\ell - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{c_n}{d_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2}$.
 $\implies \forall n \geq \tilde{n}_0: \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot d_n < c_n < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot d_n$, da nach Voraussetzung $d_n > 0$.

Sei nun $m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m \geq \tilde{n}_0$. Dann erhält man durch Aufaddieren der Ungleichungen für $n \in \{\tilde{n}_0 + 1, \dots, m\}$:

$$\left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot \sum_{n=\tilde{n}_0+1}^m d_n < \sum_{n=\tilde{n}_0+1}^m c_n < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot \sum_{n=\tilde{n}_0+1}^m d_n .$$

Mit (1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot (b_m - b_{\tilde{n}_0}) &< a_m - a_{\tilde{n}_0} < \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot (b_m - b_{\tilde{n}_0}) \\ \implies \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot b_m &< a_m - a_{\tilde{n}_0} + b_{\tilde{n}_0} \cdot \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right) \quad \text{und} \\ a_m - a_{\tilde{n}_0} + b_{\tilde{n}_0} \cdot \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right) &< \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right) \cdot b_m \\ \implies \ell - \frac{\varepsilon}{2} &< \frac{a_m}{b_m} - \frac{a_{\tilde{n}_0} - b_{\tilde{n}_0} \cdot \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{b_m} \quad \text{und} \quad \frac{a_m}{b_m} - \frac{a_{\tilde{n}_0} - b_{\tilde{n}_0} \cdot \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{b_m} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} . \end{aligned}$$

Weiter ist $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{\tilde{n}_0} - b_{\tilde{n}_0} \cdot \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{b_m} = 0$, da der Zähler konstant ist und der Nenner gegen ∞ geht.

Also gibt es ein $\tilde{n}_1$, so dass für alle $m \geq \tilde{n}_1$ gilt: $-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{\tilde{n}_0} - b_{\tilde{n}_0} \cdot \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{b_m} < \frac{\varepsilon}{2}$.

Setze nun $n_0 := \max\{\tilde{n}_0, \tilde{n}_1\}$.

Sei jetzt $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq n_0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \ell - \frac{\varepsilon}{2} &< \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{\tilde{n}_0} - b_{\tilde{n}_0} \cdot \left(\ell - \frac{\varepsilon}{2} \right)}{b_n} < \frac{a_n}{b_n} + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \\ \frac{a_n}{b_n} - \frac{\varepsilon}{2} &< \frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{\tilde{n}_0} - b_{\tilde{n}_0} \cdot \left(\ell + \frac{\varepsilon}{2} \right)}{b_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} . \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{a_n}{b_n} > \ell - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \ell - \varepsilon \quad \text{und} \quad \frac{a_n}{b_n} < \ell + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \ell + \varepsilon, \text{ also } \left| \frac{a_n}{b_n} - \ell \right| < \varepsilon .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell$, und damit gilt die Behauptung.