

Lösung zur 4. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

Aufgabe 4.1 Man zeige die folgende Variante der Bernoullischen Ungleichung: Für $0 \leq x \leq 1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}.$$

Beweis: Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 1$:

$$1-x \leq \frac{1}{1+x} \iff \frac{1}{1+x} - \frac{(1-x)(1+x)}{1+x} \geq 0 \iff \frac{x^2}{1+x} \geq 0. \text{ Diese Aussage ist richtig.}$$

oder:

$$1-x = \frac{(1-x)(1+x)}{1+x} = \frac{1-x^2}{1+x} \leq \frac{1}{1+x}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $(1-x)^n \leq \frac{1}{1+nx}$.

Induktionsschritt: Zu zeigen: $(1-x)^{n+1} \leq \frac{1}{1+(n+1)x}$.

$$\begin{aligned} (1-x)^{n+1} &= (1-x)^n \cdot (1-x) \\ &\leq \frac{1}{1+nx} \cdot (1-x) && \text{nach Induktionsvoraussetzung; } 1-x \geq 0. \\ &\leq \frac{1}{1+nx} \cdot \frac{1}{1+x} && \text{siehe Induktionsanfang; } \frac{1}{1+nx} \geq 0. \\ &= \frac{1}{1+nx+x+nx^2} \\ &\leq \frac{1}{1+nx+x} && \text{denn } nx^2 \geq 0. \\ &= \frac{1}{1+(n+1)x}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4.2 Man zeige die folgende Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung: Sind $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $-1 \leq x_k \leq 0$ für alle k oder $x_k \geq 0$ für alle k , so gilt

$$\prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k.$$

Beweis: Durch vollständige Induktion.

$$\text{Induktionsanfang: } n = 1: \prod_{k=1}^1 (1+x_k) = (1+x_1) \geq 1+x_1 = 1 + \sum_{k=1}^1 x_k.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{Induktionsvoraussetzung: Es gelte } \prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k.$$

Induktionsschritt: Zu zeigen: $\prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$.

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^{n+1} (1+x_k) &= (1+x_{n+1}) \cdot \prod_{k=1}^n (1+x_k) \\
 &\geq (1+x_{n+1}) \cdot \left(1 + \sum_{k=1}^n x_k\right) \quad \text{nach Induktionsvoraussetzung; } 1+x_{n+1} \geq 0. \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^n x_k + x_{n+1} + x_{n+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \\
 &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k\right).
 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung haben alle x_k gleiches Vorzeichen, d. h. $x_{n+1} \cdot x_k \geq 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n+1\}$.

Daraus folgt aber $x_{n+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) = \sum_{k=1}^n x_{n+1} x_k \geq 0$.

Damit gilt $1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1} \cdot \left(\sum_{k=1}^n x_k\right) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$, und daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 4.4 Die Folge

$$\left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

ist streng monoton fallend, und es gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2}$$

für alle n, m in $\mathbb{N}$.

1. **Behauptung:** Die Folge $\left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend.

Beweis: Zu zeigen: $\frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\iff \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n+1} \\
 &\iff \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\
 &\iff \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \\
 &\iff n+1 > n \\
 &\iff 1 > 0, \text{ und das ist eine wahre Aussage.}
 \end{aligned}$$

Alternativ kann man auch $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \left(\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\right) < 0$ zeigen.

2. **Behauptung:** Es gilt $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2}$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$.

Beweis: Fallunterscheidung:

1. **Fall:** Sei $1 \leq n < m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} &\leq \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\ &\leq \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} . \end{aligned}$$

2. **Fall:** Sei $1 \leq n = m$. Es gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} .$$

3. **Fall:** Sei $1 \leq m < n$. Da die Folge streng monoton fallend und $m < n$ ist, gilt:

$$\frac{1}{m} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^2} > \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} .$$

Damit ist die Behauptung für alle möglichen Fälle bewiesen.

Aufgabe 4.5 Man zeige, daß die Folgen

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

beschränkt sind.

1. **Behauptung:** $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Beweis: Da $\frac{1}{n} \leq 1$ ist, gilt

$$0 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1 = \frac{1}{n} \cdot n = 1 .$$

Also ist die Folge nach unten und nach oben beschränkt.

2. **Behauptung:** $\left(\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Beweis: Sei $n < 2^m$.

$$h_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{2^m-1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^m-1}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{15}\right) + \dots + \frac{1}{2^m - 1} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{j} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} \left(\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{2^k} \right) \quad \text{denn } j \geq 2^k \implies \frac{1}{j} \leq \frac{1}{2^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} 1 \\
&= m .
\end{aligned}$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $2^{m-1} \leq n < 2^m$. Für dieses m gilt:

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq m \implies \frac{h_n^2}{n} = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \leq \frac{m^2}{n} \leq \frac{m^2}{2^{m-1}} .$$

Wir zeigen: Die Folge $\left(\frac{m^2}{2^{m-1}} \right)_{m \in \mathbb{N}, m \geq 3}$ ist monoton fallend:

$$\frac{m^2}{2^{m-1}} - \frac{(m+1)^2}{2^{(m+1)-1}} = \frac{2m^2 - m^2 - 2m - 1}{2^m} = \frac{(m-1)^2 - 2}{2^m} \geq \frac{(3-1)^2 - 2}{2^m} = \frac{2}{2^m} \geq 0 .$$

Also gilt für $m \geq 3$: $\frac{m^2}{2^{m-1}} \leq \frac{3^2}{2^{3-1}} = \frac{9}{4}$.

Für $m = 1$ gilt: $\frac{m^2}{2^{m-1}} = \frac{1^2}{2^{1-1}} = 1 < \frac{9}{4}$.

Für $m = 2$ gilt: $\frac{m^2}{2^{m-1}} = \frac{2^2}{2^{2-1}} = 2 < \frac{9}{4}$.

Insgesamt gilt also für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)^2 \leq \frac{9}{4} ,$$

damit ist die Folge beschränkt.

Aufgabe 4.6 Man zeige für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen:

$$1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \leq 1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \leq 1 + \frac{2}{n} .$$

1. **Behauptung:** $1 - \frac{1}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Setze in der Bernoullischen Ungleichung $x = -\frac{1}{n^2} \geq -2$.

Damit gilt:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^n \geq 1 + n \cdot \left(-\frac{1}{n^2} \right) = 1 - \frac{1}{n} .$$

2. **Behauptung:** $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Es gilt

$$0 \leq 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1 \implies \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1^n \leq 1.$$

3. **Behauptung:** $1 \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Es gilt

$$1 \leq 1 + \frac{1}{n^2} \implies 1 = 1^n \leq \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n.$$

4. **Behauptung:** $\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n \leq 1 + \frac{2}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n \geq k$ gilt:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \leq \frac{n!}{(n-k)!} = \prod_{j=n-k+1}^n j \leq \prod_{j=n-k+1}^n n = n^k.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \\ &= 1 + n \cdot \frac{1}{n^2} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n n^k \cdot \left(\frac{1}{n^2}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k}\right)^k \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-2} \\ &\leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=2}^{n+1} 1 \\ &= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot n \\ &= 1 + \frac{2}{n}. \end{aligned}$$