

### Lösung zur 3. Übung Analysis 1 WS 2000-2001

**Aufgabe 3.2 a)** Für eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  zeige man:  $f$  ist genau dann injektiv, wenn eine Abbildung  $\ell : N \rightarrow M$  existiert, so daß  $\ell \circ f = I$  gilt, wobei  $I$  die identische Abbildung auf  $M$  ist.  $\ell$  heißt eine Linksinverse von  $f$ . Welche Abbildungen  $f$  haben eine eindeutige Linksinverse?

Wir setzen zusätzlich voraus, daß  $M \neq \emptyset$ .

Sei  $f : M \rightarrow N$  eine Abbildung.

**Behauptung:**  $f$  injektiv  $\iff$  Es gibt eine Abb.  $\ell : N \rightarrow M$ , so daß  $\ell \circ f = I$ .

**Beweis:**

1. Sei  $f$  injektiv, d. h. für alle  $x, \tilde{x} \in M$  gelte:  $f(x) = f(\tilde{x}) \implies x = \tilde{x}$ .  
Damit ist zu jedem  $y \in f(M)$  eindeutig ein  $x \in M$  bestimmt mit  $y = f(x)$ .  
Sei  $x_0 \in M$  beliebig. Definiere dann  $\ell : N \rightarrow M$  mittels

$$\ell(y) = \begin{cases} x & , \text{ falls } x \in M \text{ mit } y = f(x) \\ x_0 & , \text{ falls es kein solches } x \text{ gibt.} \end{cases}$$

Dies ist wohldefiniert (da *jedem*  $y \in N$  nach obiger Bemerkung *genau* ein  $x \in M$  durch  $\ell$  zugeordnet wird), und es gilt  $\ell \circ f = I$ .

2. Es existiere  $\ell : N \rightarrow M$  mit  $\ell \circ f = I$ . Seien  $x, y \in M$ , so daß  $f(x) = f(y)$ .  
 $\implies x = \ell(f(x)) = \ell(f(y)) = y \implies x = y$ .  
Also ist  $f$  injektiv.

3. Eindeutig wird obige Definition der Abbildung  $\ell$  dadurch, daß für alle Elemente der Menge  $N$  ein Urbild unter der Abbildung  $f$  gefunden werden kann. Die Linksinverse ist also dann eindeutig bestimmt, wenn  $f$  sowohl injektiv als auch surjektiv, also bijektiv, ist.  
Falls  $M$  eine einelementige Menge ist, ist die Linksinverse ebenfalls eindeutig bestimmt: Sie ordnet jedem Element von  $N$  das einzige Element von  $M$  zu.

**Aufgabe 3.3** Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte (bzw. monoton wachsende) Funktionen. Sind dann auch die Funktionen  $f+g$ ,  $f \cdot g$  und  $f \circ g$  beschränkt (bzw. monoton wachsend)?

Seien also  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkte Funktionen.

**Behauptung:** Auch  $f+g$ ,  $f \cdot g$  und  $f \circ g$  sind beschränkt.

**Beweis:**

$f$  beschränkt  $\iff$  Es existiert  $a \geq 0$ , so daß für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $|f(x)| \leq a$ .

$g$  beschränkt  $\iff$  Es existiert  $b \geq 0$ , so daß für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $|g(x)| \leq b$ .

Damit gilt für alle  $x \in \mathbb{R}$ :

$|(f+g)(x)| \leq |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq |f(x)| + b \leq a + b$ , d.h.  $f+g$  ist beschränkt.

$|(f \cdot g)(x)| = |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq a \cdot |g(x)| \leq ab$ , d.h.  $f \cdot g$  ist

beschränkt.

$|(f \circ g)(x)| = |f(g(x))| \leq a$ , da  $g(x) \in \mathbb{R}$  und  $|f(z)| \leq a$  für alle  $z \in \mathbb{R}$ .

Damit ist auch  $f \circ g$  beschränkt.

Seien jetzt  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  monoton wachsend.

**Behauptung:** Auch  $f + g$  und  $f \circ g$  sind monoton wachsend.

**Beweis:**

Sei  $f$  monoton wachsend, d.h.  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $x < y \implies f(x) \leq f(y)$ .

Sei  $g$  monoton wachsend, d.h.  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  gilt:  $x < y \implies g(x) \leq g(y)$ .

Dann gilt für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$ :

$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \leq f(y) + g(x) \leq f(y) + g(y) = (f + g)(y)$ .

Also ist  $f + g$  monoton wachsend.

$x < y \implies g(x) \leq g(y) \implies f(g(x)) \leq f(g(y)) \iff (f \circ g)(x) \leq (f \circ g)(y)$ .

Also ist auch  $f \circ g$  monoton wachsend.

**Behauptung:**  $f \cdot g$  ist i. a. nicht mehr monoton wachsend.

**Beweis:** Gegenbeispiel:

Betrachte  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -1$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x < y$ .

$f$  ist monoton wachsend, denn  $f(x) = -1 \leq -1 = f(y)$ .

$g$  ist monoton wachsend, denn  $g(x) = x \leq y = g(y)$ .

Aber  $(f \cdot g)(x) = -1 \cdot g(x) = -g(x) = -x > -y = (f \cdot g)(y)$ , also ist  $f \cdot g$  nicht monoton wachsend.

**Aufgabe 3.4** Man finde eine injektive, nicht monotone Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Betrachte  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} x & ; \quad x \in [0, 1) \\ -1 & ; \quad x = 1 \end{cases}$$

Für  $x, y \in [0, 1)$  und  $x < y$  gilt dann  $f(x) = x < y = f(y)$ .

Für  $x \in [0, 1)$  und  $y = 1$  gilt ebenfalls  $x < y$ , aber  $f(x) = x > -1 = f(y)$ .

Daher ist  $f$  nicht monoton.

Seien  $x, y \in [0, 1]$ , so daß  $f(x) = f(y)$ .

Dann gilt entweder  $f(x) = -1$  oder  $f(x) \neq -1$ .

1. Fall: Sei  $f(x) = -1$ . Dann gilt  $f(y) = f(x) = -1 \implies x = y = 1$ .

2. Fall: Sei  $f(x) \neq -1$ . Dann gilt  $f(x), f(y) \in [0, 1)$  und damit  $x = f(x) = f(y) = y$ .

Daher ist  $f$  injektiv.

**Aufgabe 3.6** Für Mengen  $A, M, N$  und Abbildungen  $f : A \rightarrow M, g : A \rightarrow N$  definieren wir eine Abbildung  $h : A \rightarrow M \times N$  von  $A$  in das kartesische Produkt von  $M$  und  $N$  durch  $h(x) := (f(x), g(x))$  für  $x \in A$ . Man beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

$$\begin{array}{ll}
f, g \text{ injektiv} & \Rightarrow h \text{ injektiv} \\
h \text{ injektiv} & \Rightarrow f, g \text{ injektiv} \\
f, g \text{ surjektiv} & \Rightarrow h \text{ surjektiv} \\
h \text{ surjektiv} & \Rightarrow f, g \text{ surjektiv}
\end{array}$$

Seien  $A, M$  und  $N$  Mengen,  $f : A \rightarrow M$ ,  $g : A \rightarrow N$  Abbildungen. Sei  $h : A \rightarrow M \times N$  definiert durch  $h(x) := (f(x), g(x))$  für  $x \in A$ .

**Behauptung:**  $f, g$  injektiv  $\implies h$  injektiv.

(Genauer:  $f$  injektiv oder  $g$  injektiv  $\implies h$  injektiv.)

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
\text{Sei } h(x) = h(y) & \iff (f(x), g(x)) = (f(y), g(y)) \\
& \iff f(x) = f(y) \text{ und } g(x) = g(y). \\
& \implies x = y, \text{ sobald mindestens eine der beiden Funktionen, } f \\
& \text{ oder} \\
& \qquad g, \text{ injektiv ist.}
\end{aligned}$$

Also ist  $h$  dann injektiv.

**Behauptung:** „ $h$  injektiv  $\implies f, g$  injektiv“ ist i. a. nicht richtig.

**Beweis:** Durch Gegenbeispiel:

Seien  $A = M = N = \{0, 1\}$ ,  $f(x) = 0$  und  $g(x) = x$  für alle  $x \in A$ .

Dann ist  $g$  injektiv,  $f$  dagegen offensichtlich nicht.

Aber  $h$  ist injektiv, denn  $h(x) = (f(x), g(x)) = (0, x)$ , und  $h(0) \neq h(1)$ .

**Behauptung:** „ $f, g$  surjektiv  $\implies h$  surjektiv“ ist i. a. nicht richtig.

**Beweis:**

Durch Gegenbeispiel:

Seien wieder  $A = M = N = \{0, 1\}$ ,  $f(x) = g(x) = x$  für alle  $x \in A$ .

Dann sind  $f$  und  $g$  surjektiv.

Aber  $h$  ist nicht surjektiv, denn  $h(x) = (f(x), g(x)) = (x, x)$ , und  $(0, 1)$  und  $(1, 0)$  haben kein Urbild unter  $h$ .

**Behauptung:**  $h$  surjektiv  $\implies f, g$  surjektiv ( $M, N \neq \emptyset$ ).

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
h \text{ surjektiv, d. h. } \forall (x, y) \in M \times N \quad \exists z \in A \quad h(z) = (f(z), g(z)) = (x, y). \\
\implies \forall x \in M \quad \exists z \in A \quad x = f(z) \text{ und} \\
\qquad \forall y \in N \quad \exists z \in A \quad y = g(z) \\
\iff f, g \text{ surjektiv.}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3.8** Für folgende Mengen  $M$  gebe man jeweils eine bijektive Abbildung  $f : (0, 1) \rightarrow M$  an:  $M = (-3, 7)$ ,  $M = (0, \infty)$ ,  $M = \mathbb{R}$ .

1. Sei  $M = (-3, 7)$ .

Betrachte dann  $f : (0, 1) \longrightarrow (-3, 7); \quad x \longmapsto 10x - 3$ .

Dann ist  $g : (-3, 7) \longrightarrow (0, 1); \quad x \longmapsto \frac{x+3}{10}$  die Umkehrabbildung von  $f$ , denn  $f(g(y)) = 10 \cdot \frac{y+3}{10} - 3 = y$  für alle  $y \in (-3, 7)$  und  $g(f(x)) = x$  für alle  $x \in (0, 1)$ . Also ist  $f$  bijektiv.

2. Sei  $M = (0, \infty)$ .

Betrachte  $f : (0, 1) \longrightarrow (0, \infty); \quad x \longmapsto \frac{1}{x} - 1$ .

Wieder läßt sich die Umkehrabbildung einfach angeben, sie lautet  $g : (0, \infty) \longrightarrow (0, 1); \quad x \longmapsto \frac{1}{x+1}$ .

Damit ist  $f$  bijektiv, denn  $(g \circ f)(x) = x$  für alle  $x \in (0, 1)$  und  $(f \circ g)(y) = y$  für alle  $y \in (0, \infty)$ .

3. Sei  $M = \mathbb{R}$ .

Betrachte  $f : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R};$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2x-1} + 1 & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & ; \quad x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2x-1} - 1 & ; \quad \frac{1}{2} < x < 1. \end{cases}$$

Hier lautet die Umkehrabbildung  $g : \mathbb{R} \longrightarrow (0, 1);$

$$x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{2x-2} + \frac{1}{2} & ; \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & ; \quad x = 0 \\ \frac{1}{2x+2} + \frac{1}{2} & ; \quad x > 0. \end{cases}$$

Es gilt  $(g \circ f)(x) = x$  für alle  $x \in (0, 1)$  und  $(f \circ g)(y) = y$  für alle  $y \in \mathbb{R}$ .

Daher ist  $f$  bijektiv.