

Lösung zur 2. Übung Analysis I

Aufgabe 2.2 Rechnen Sie nach:

$$\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n a_{k+1} = a_m + 2 \sum_{k=m+1}^n a_k + a_{n+1}$$

$$\prod_{k=2m}^{2n} a_k \cdot \prod_{k=m}^n a_{2k} = \prod_{k=m}^n a_{2k}^2 \cdot \prod_{k=m}^{n-1} a_{2k+1}$$

Behauptung: $\sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n a_{k+1} = a_m + 2 \sum_{k=m+1}^n a_k + a_{n+1}$ für $n \geq m$

Beweis:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m}^n a_{k+1} &= \sum_{k=m}^n a_k + \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k \\ &= \left(a_m + \sum_{k=m+1}^n a_k \right) + \left(\sum_{k=m+1}^n a_k + a_{n+1} \right) \\ &= a_m + 2 \sum_{k=m+1}^n a_k + a_{n+1} \quad . \end{aligned}$$

Behauptung: $\prod_{k=2m}^{2n} a_k \cdot \prod_{k=m}^n a_{2k} = \prod_{k=m}^n a_{2k}^2 \cdot \prod_{k=m}^{n-1} a_{2k+1}$ für $n \geq m$

Beweis:

$$\begin{aligned} \prod_{k=2m}^{2n} a_k \cdot \prod_{k=m}^n a_{2k} &= \prod_{k=m}^{n-1} (a_{2k} \cdot a_{2k+1}) \cdot a_{2n} \cdot \prod_{k=m}^n a_{2k} \\ &= \prod_{k=m}^n a_{2k} \cdot \prod_{k=m}^{n-1} a_{2k+1} \cdot \prod_{k=m}^n a_{2k} \\ &= \left(\prod_{k=m}^n a_{2k} \right)^2 \cdot \prod_{k=m}^{n-1} a_{2k+1} \\ &= \prod_{k=m}^n a_{2k}^2 \cdot \prod_{k=m}^{n-1} a_{2k+1} \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 2.3 Beweisen Sie durch Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k &= \frac{n(n+1)}{2} \\ \sum_{k=1}^n k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ \sum_{k=1}^n k^3 &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad . \end{aligned}$$

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Beweis: Durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Z. z. $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad (\text{nach Induktionsvoraussetzung}) \\ &= \frac{n^2+n+(2n+2)}{2} \\ &= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Beweis: Durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Induktionsschritt: Z. z. $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{6(n+1)^2}{6} \quad \text{nach Ind.vor.} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Damit gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Beweis: Durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=1}^1 k^3 = 1 = \frac{4}{4} = \frac{1 \cdot 2^2}{4} = \frac{1^2(1+1)^2}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Induktionsschritt: Z. z. $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{4(n+1)^3}{4} \quad \text{nach Ind.vor.} \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Aufgabe 2.4 Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) \text{ und } \sum_{k=1}^n (2k-1)^2.$$

Benutze dabei die Ergebnisse aus Aufgabe 2.3.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1) &= \sum_{k=1}^n 2k + \sum_{k=1}^n (-1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2 \frac{n(n+1)}{2} - n = n^2 + n - n = n^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) = \sum_{k=1}^n (4k^2) + \sum_{k=1}^n (-4k) + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + n \\ &= 4 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{2}{3} (n^2 + n)(2n+1) - 2(n^2 + n) + n \\ &= \frac{2}{3} (2n^3 + n^2 + 2n^2 + n) - 2n^2 - 2n + n \\ &= \frac{4}{3} n^3 + 2n^2 + \frac{2}{3} n - 2n^2 - n \\ &= \frac{4}{3} n^3 - \frac{1}{3} n. \end{aligned}$$

Aufgabe 2.5 Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\text{a) } 2^n > n^2 \quad \text{b) } 3^{2^n} < 2^{3^n} \quad \text{c) } \prod_{k=1}^n k^k < n^{\frac{n(n+1)}{2}} ?$$

(a) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^2$?

Einsetzen:

$$n=1: \quad 2^1 = 2 > 1 = 1^2 \implies \text{Die Aussage ist für } n=1 \text{ erfüllt.}$$

$$n=2: \quad 2^2 = 4 = 2^2$$

$$n=3: \quad 2^3 = 8 < 9 = 3^2$$

$$n=4: \quad 2^4 = 16 = 4^2 \implies \text{Die Aussage ist für } n \in \{2, 3, 4\} \text{ nicht erfüllt.}$$

Behauptung: Für alle $n \geq 5$ gilt $2^n > n^2$.

Beweis: Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n=5 \quad 2^5 = 32 > 25 = 5^2 = n^2$

Sei $n \geq 5$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $2^n > n^2$.

Induktionsschritt: Zu zeigen: $2^{n+1} > (n+1)^2$.

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \\ &< n^2 + \frac{1}{2}n^2 + 1 && \text{da } n > 4 \iff n^2 > 4n \\ &< 2^n + \frac{1}{2}2^n + 1 && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= 2^n + 2^{n-1} + 1 \\ &< 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-1} && \text{da } 1 < 2^{n-1} \text{ für } n \geq 2 \\ &= 2^n(1 + 2^{-1} + 2^{-1}) \\ &= 2^n \cdot 2 = 2^{n+1} \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist also für $n = 1$ oder $n \geq 5$ erfüllt.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $3^{2^n} < 2^{3^n}$?

Einsetzen:

$n = 1$:

$$3^{2^n} = 3^{2^1} = 9 > 8 = 2^{3^1} = 2^{3^n}.$$

$\implies$ Die Aussage ist für $n = 1$ nicht erfüllt.

$n = 2$:

$$3^{2^n} = 3^{2^2} = 3^4 = 81 < 512 = 2^9 = 2^{2^3} = 2^{3^n}.$$

$\implies$ Die Aussage ist für $n = 2$ erfüllt.

Behauptung: Für alle $n \geq 2$ gilt $3^{2^n} < 2^{3^n}$.

Beweis: Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 2$: s. o.

Sei $n \geq 2$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $3^{2^n} < 2^{3^n}$

$$\begin{aligned} \text{Induktionsschritt: Z. z. } 3^{2^{n+1}} &< 2^{3^{n+1}} \\ 3^{2^{n+1}} &= 3^{2 \cdot 2^n} = (3^{2^n})^2 \\ &< (2^{3^n})^2 && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\ &= 2^{2 \cdot 3^n} \\ &< 2^{3 \cdot 3^n} = 2^{3^{n+1}}. \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist also für $n \geq 2$ erfüllt.

(c) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\prod_{k=1}^n k^k < n^{\frac{n(n+1)}{2}}$?

Einsetzen:

$n = 1$:

$$\prod_{k=1}^1 k^k = 1 = 1^1 = 1^{\frac{1(1+1)}{2}}.$$

$\implies$ Die Aussage ist für $n = 1$ nicht erfüllt.

$n = 2$:

$$\prod_{k=1}^2 k^k = 2^2 = 4 < 8 = 2^3 = 2^{\frac{2 \cdot 3}{2}}.$$

$\implies$ Die Aussage ist für $n = 2$ erfüllt.

Behauptung: Für alle $n \geq 2$ gilt $\prod_{k=1}^n k^k < n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Beweis: Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: $n = 2$: s. o.

Sei $n \geq 2$.

Induktionsvoraussetzung: Es gelte $\prod_{k=1}^n k^k < n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Induktionsschritt: Z. z. $\prod_{k=1}^{n+1} k^k < (n+1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^{n+1} k^k &= \prod_{k=1}^n k^k \cdot (n+1)^{n+1} \\
 &< n^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)^{n+1} && \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
 &< (n+1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n+1)^{n+1} \\
 &= (n+1)^{\sum_{k=1}^n k} (n+1)^{n+1} \\
 &= (n+1)^{\sum_{k=1}^{n+1} k} = (n+1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}.
 \end{aligned}$$

Die Ungleichung ist also für $n \geq 2$ erfüllt.

Aufgabe 2.6 Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \text{ und } \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Beweis: Nach dem binomischen Lehrsatz (Satz 1.2.15) gilt:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Damit folgt:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Beweis: Ebenso mit dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$0 = (1-1)^n = (1+(-1))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k.$$

Aufgabe 2.7 Endliche Mengen $M \subset \mathbb{R}$ besitzen ein Minimum und ein Maximum.

Beweis: Durch vollständige Induktion über die Mächtigkeit von M .

Nach Bem. 1.3.19 ist eine Menge M genau dann endlich, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Bijektion $a : \{1, 2, 3, \dots, n\} \rightarrow M$ gibt. Somit wird die leere Menge nicht als endlich angesehen, und M besitzt mindestens ein Element.

Induktionsanfang:

M habe die Mächtigkeit 1, d.h. $M = \{a\}$ für ein $a \in \mathbb{R}$.
Dann gilt $a = \max M = \min M$.

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsvoraussetzung:

Jede Menge $M \subset \mathbb{R}$ der Mächtigkeit n habe ein Minimum und ein Maximum.

Induktionsschritt:

Sei $M \subset \mathbb{R}$ mit Mächtigkeit $n + 1$.

Zu zeigen: M besitzt ein Minimum und ein Maximum.

$M = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ mit $x_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$.

Betrachte $M' := \{x_1, \dots, x_n\}$. M' besitzt die Mächtigkeit n , und damit nach Induktionsvoraussetzung ein Minimum und ein Maximum.

Setze also $a := \min M'$ und $b := \max M'$. Nach Def. des Minimums bzw. Maximums (Def. 1.1.11) gilt dann $a \leq x_k \leq b$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$.

Da x_{n+1}, a und b reelle Zahlen sind, folgt aus Bem. 1.1.10:

Es gilt entweder $b \leq x_{n+1}$ oder $x_{n+1} < b$ und es gilt entweder $x_{n+1} \leq a$ oder $a < x_{n+1}$.

Für das Maximum:

1. Fall: Es gelte $b \leq x_{n+1}$.

Wegen der Transitivität und Reflexivität von $\leq$ gilt dann $\forall k \in \{1, 2, \dots, n + 1\} \quad x_k \leq b \leq x_{n+1}$
 $\implies x_{n+1} = \max M$.

2. Fall: $x_{n+1} < b$

Dann gilt $\forall k \in \{1, \dots, n + 1\} \quad x_k \leq b$ und damit $b = \max M$.

Für das Minimum:

1. Fall: Es gelte $x_{n+1} \leq a$.

Wegen der Transitivität und Reflexivität von $\leq$ gilt dann $\forall k \in \{1, 2, \dots, n + 1\} \quad x_{n+1} \leq a \leq x_k$
 $\implies x_{n+1} = \min M$.

2. Fall: $a < x_{n+1}$

Dann gilt $\forall k \in \{1, \dots, n + 1\} \quad a \leq x_k$ und damit $a = \min M$.