

## Lösung zur 1. Übung Analysis I

**Aufgabe 1.1** Für Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$  zeige man  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$  und  $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ .

Seien also  $A$ ,  $B$  und  $C$  Mengen.

**Behauptung:**  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}x \in (A \cap B) \cup C &\iff x \in (A \cap B) \vee x \in C \\&\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in C \\&\iff (x \in A \vee x \in C) \wedge (x \in B \vee x \in C) \\&\iff x \in (A \cup C) \wedge x \in (B \cup C) \\&\iff x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)\end{aligned}$$

**Behauptung:**  $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}x \in C \setminus (A \cap B) &\iff x \in C \wedge x \notin (A \cap B) \\&\iff x \in C \wedge (x \notin A \vee x \notin B) \\&\iff (x \in C \wedge x \notin A) \vee (x \in C \wedge x \notin B) \\&\iff (x \in C \setminus A) \vee (x \in C \setminus B) \\&\iff x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B)\end{aligned}$$

**Aufgabe 1.2** Es sei  $A$  die Menge der geraden und  $B$  die Menge der durch 3 teilbaren Zahlen. Man bestimme die Mengen  $A \cap B$  und  $B \setminus A$ .

Es ist also:

$$\begin{aligned}A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist Vielfaches von } 2\} \\B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist Vielfaches von } 3\}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}A \cap B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist Vielfaches von } 2 \text{ **und** von } 3\} \\&= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist Vielfaches von } 6\}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}B \setminus A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist Vielfaches von } 3 \text{ aber nicht von } 2\} \\&= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist ungerades Vielfaches von } 3\}\end{aligned}$$

Somit ist  $A \cap B$  die Menge aller durch 6 teilbaren Zahlen und  $B \setminus A$  die Menge aller ungeraden durch 3 teilbaren Zahlen.

#### Aufgabe 1.4

(a) Für  $a \in \mathbb{R}$  zeige man  $|a| = \max\{a, 0\} + \max\{-a, 0\}$ .

(b) Für  $a, b \in \mathbb{R}$  zeige man

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

und

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$$

(a) Sei also  $a \in \mathbb{R}$ .

**Behauptung:**  $|a| = \max\{a, 0\} + \max\{-a, 0\}$

**Beweis:** durch Fallunterscheidung.

1. Fall:  $a \geq 0$ , d. h.

$$|a| = a, \max\{a, 0\} = a \text{ und } \max\{-a, 0\} = 0.$$

Dann gilt:

$$|a| = a = a + 0 = \max\{a, 0\} + \max\{-a, 0\}.$$

2. Fall:  $a < 0$ , d. h.

$$|a| = -a, \max\{a, 0\} = 0 \text{ und } \max\{-a, 0\} = -a.$$

Dann gilt:

$$|a| = -a = 0 + (-a) = \max\{a, 0\} + \max\{-a, 0\}.$$

(b) Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Behauptung:**  $\max\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$

**Beweis:** durch Fallunterscheidung.

1. Fall:  $a \geq b$ , d. h.

$$a - b \geq 0 \implies |a - b| = a - b \text{ und } \max\{a, b\} = a.$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = \frac{1}{2}(2a) = a = \max\{a, b\}.$$

2. Fall:  $a < b$ , d. h.

$$a - b < 0 \implies |a - b| = -(a - b) = b - a \text{ und } \max\{a, b\} = b.$$

Dann gilt:

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = \frac{1}{2}(2b) = b = \max\{a, b\}.$$

**Alternativer Beweis:** Es gilt

$$\max\{a, b\} = \max\{a - b, 0\} + b$$

und

$$\max\{a, b\} = \max\{0, b - a\} + a.$$

Durch addieren der zwei Gleichungen erhalten wir

$$2 \cdot \max\{a, b\} = \max\{a - b, 0\} + \max\{0, b - a\} + a + b$$

und daraus

$$\begin{aligned} \max\{a, b\} &= \frac{1}{2} \left( \max\{a - b, 0\} + \max\{-(a - b), 0\} + a + b \right) \\ &= \frac{1}{2} (|a - b| + a + b) \end{aligned}$$

**Behauptung:**  $\min\{a, b\} = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$

**Beweis:** durch Fallunterscheidung.

1. Fall:  $a \leq b$ , d. h.

$$\begin{aligned} a - b \leq 0 &\implies |a - b| = -(a - b) = b - a \text{ und } \min\{a, b\} = a. \\ \text{Dann gilt: } \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) &= \frac{1}{2}(a + b - (b - a)) \\ &= \frac{1}{2}(a + b - b + a) \\ &= \frac{1}{2}(2a) = a = \min\{a, b\} \end{aligned}$$

2. Fall:  $a > b$ , d. h.

$$\begin{aligned} a - b > 0 &\implies |a - b| = a - b \text{ und } \min\{a, b\} = b. \\ \text{Dann gilt: } \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) &= \frac{1}{2}(a + b - (a - b)) \\ &= \frac{1}{2}(a + b - b + a) \\ &= \frac{1}{2}(2b) = b = \min\{a, b\} \end{aligned}$$

**Alternativer Beweis:**

$$\begin{aligned} \min\{a, b\} &= -\max\{-a, -b\} \\ &= -\frac{1}{2}(|-a - (-b)| - a - b) \\ &= \frac{1}{2}(a + b - |a - b|) \end{aligned}$$

**Aufgabe 1.5** Welche Zahlen  $x \in \mathbb{R}$  erfüllen die Ungleichungen  $x + 1 \leq 2|x| \leq x + 2$  bzw.  $|5x + 3| - |3x - 2| \geq 5$ ?

(a) **ges.:** alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x + 1 \leq 2|x| \leq x + 2$

Betrachte dazu 2 Fälle:

1. Sei  $x \geq 0 \implies |x| = x$

Weiter gilt dann:

$$\begin{aligned} x + 1 \leq 2x &\iff 1 \leq x \text{ und } 2x \leq x + 2 \iff x \leq 2, \\ \text{d. h. } 1 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

2. Sei  $x < 0 \implies |x| = -x$

Weiter gilt dann:

$$\begin{aligned} x + 1 \leq -2x &\iff 1 \leq -3x \iff -\frac{1}{3} \geq x \text{ und} \\ -2x \leq x + 2 &\iff -3x \leq 2 \iff x \geq -\frac{2}{3}, \\ \text{d. h. } -\frac{2}{3} &\leq x \leq -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{3} \vee 1 \leq x \leq 2\}$ .

(b) **ges.:** alle  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|5x + 3| - |3x - 2| \geq 5$

Vorbetrachtung:

$$\begin{aligned} |5x + 3| = 5x + 3 &\iff 5x + 3 \geq 0 \iff 5x \geq -3 \iff x \geq -\frac{3}{5} \\ |3x - 2| = 3x - 2 &\iff 3x - 2 \geq 0 \iff 3x \geq 2 \iff x \geq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Fallunterscheidung:

1. Sei  $x \geq -\frac{3}{5} \wedge x \geq \frac{2}{3}$ , also  $x \geq \frac{2}{3}$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |5x + 3| - |3x - 2| \geq 5 &\iff 5x + 3 - 3x + 2 \geq 5 \\ &\iff 2x + 5 \geq 5 \\ &\iff 2x \geq 0 \\ &\iff x \geq 0 \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung für diesen Fall ergibt sich also  $x \geq \frac{2}{3}$ .

2. Sei  $x < -\frac{3}{5} \wedge x \geq \frac{2}{3}$ : Dieser Fall kann nicht eintreten!

3. Sei  $x \geq -\frac{3}{5} \wedge x < \frac{2}{3}$ , also  $-\frac{3}{5} \leq x < \frac{2}{3}$   
Daraus folgt dann

$$\begin{aligned} |5x + 3| - |3x - 2| &= 5x + 3 + 3x - 2 &= 8x + 1 \geq 5 \\ &\iff 8x \geq 4 \\ &\iff x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit der Voraussetzung für diesen Fall ergibt sich also  $\frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}$ .

4. Sei  $x < -\frac{3}{5} \wedge x < \frac{2}{3}$ , also  $x < -\frac{3}{5}$   
Dann gilt

$$\begin{aligned} |5x + 3| - |3x - 2| &= -5x - 3 + 3x - 2 &= -2x - 5 \geq 5 \\ &\iff -2x \geq 10 \\ &\iff x \leq -5 \end{aligned}$$

Durch Vereinigung der Lösungsmengen der einzelnen Fälle ergibt sich  
 $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -5 \vee x \geq \frac{1}{2}\}$ .

**Aufgabe 1.6** Die **Distanz**  $d(x, y) := |x - y|$  reeller Zahlen hat die folgenden Eigenschaften:

- (a)  $d(x, y) \geq 0; d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (b)  $d(x, y) = d(y, x)$
- (c)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Verwenden sie nur die Rechenregeln für den Betrag.

Die benötigten Rechenregeln für den Betrag finden sich in Satz 1.1.16 aus den Vorlesungsnotizen:

- (a)  $x - y \in \mathbb{R} \implies d(x, y) = |x - y| \geq 0$  Regel (1)
- $d(x, y) = |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$  Regel (2)
- (b)  $d(x, y) = |x - y| = 1 \cdot |x - y| = |-1| \cdot |x - y|$   
 $= |-(x - y)|$  Regel (3)  
 $= |y - x| = d(y, x)$
- (c)  $d(x, y) = |x - y| = |x + 0 - y| = |x - z + z - y|$  denn  $-z + z = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}$   
 $= |(x - z) + (z - y)|$  Assoziativität der Addition  
 $\leq |x - z| + |z - y|$  Regel (4) ( $\Delta$  - Ungleichung)  
 $= d(x, z) + d(z, y)$