

Mathematik für Informatiker I
Musterlösung Übungsblatt 9**Abgabetermin Montag 13.1.2003 vor der Vorlesung**

1. Berechnen Sie die von der
- x
- Achse und dem Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

eingeschlossene Fläche und fertigen Sie eine Skizze an.

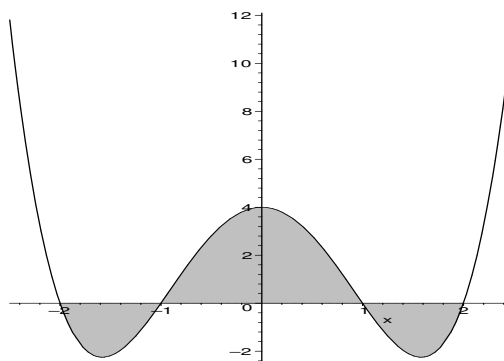
Lösung:Wir bestimmen zunächst die Nullstellen von f :
 $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ oder } x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ oder } x = \pm 2$ und bezeichnen diese mit $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Wegen $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$, wissen wir daß $f(x) > 0$ für $x \in]-\infty, -2[\cup]-1, 1[\cup]2, \infty[$ und $f(x) < 0$ für $x \in]-2, -1[\cup]1, 2[$. Weiter wissen wir, daß f achsensymmetrisch bzgl. $x = 0$ ist. Somit ist die von dem Graphen und der x -Achse eingeschlossene Fläche A gleich

$$A = -2 \int_{-2}^{-1} f(x) dx + 2 \int_{-1}^0 f(x) dx$$

Um das Integral zu berechnen bestimmen wir eine Stammfunktion $F = \frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 4x$. Damit ist

$$\begin{aligned} A &= -2(F(-1) - F(-2)) + 2(F(0) - F(1)) \\ &= 2F(-2) - 4F(-1) + 2F(0) \\ &= 2\frac{-16}{15} - 4\frac{-38}{15} + 0 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Plot von f :

2. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

mittels der Substitution

$$x = \sin t$$

Lösung:

Mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-(\sin t)^2} (\cos t) dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^2 dt \end{aligned}$$

Mit partieller Integration:

$$\int (\cos t)^2 dt - \int (\sin t)^2 dt = [\cos t \sin t]$$

also

$$2 \int (\cos t)^2 dt - \int 1 dt = [\cos t \sin t]$$

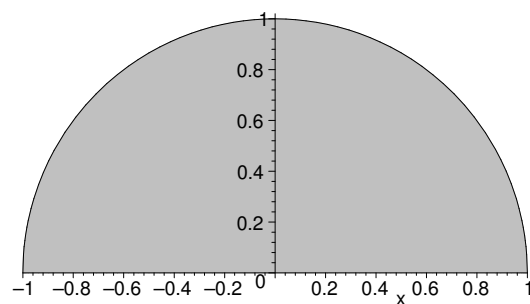
also

$$\int (\cos t)^2 dt = \frac{1}{2} [(\cos t \sin t) + t]$$

Damit

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} [(\cos t \sin t) + t]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Plot:



(a) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von

$$f(x) = \frac{x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1}{x^3 + 3x + 1}$$

(b) Zeigen Sie, für

$$f : \mathbb{R}_{>-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) := \sqrt[5]{x^3 + \sqrt{x^7 + 1}}$$

gilt

$$f(x) = x^{\frac{7}{10}} + O\left(x^{\frac{2}{10}}\right)$$

Lösung:

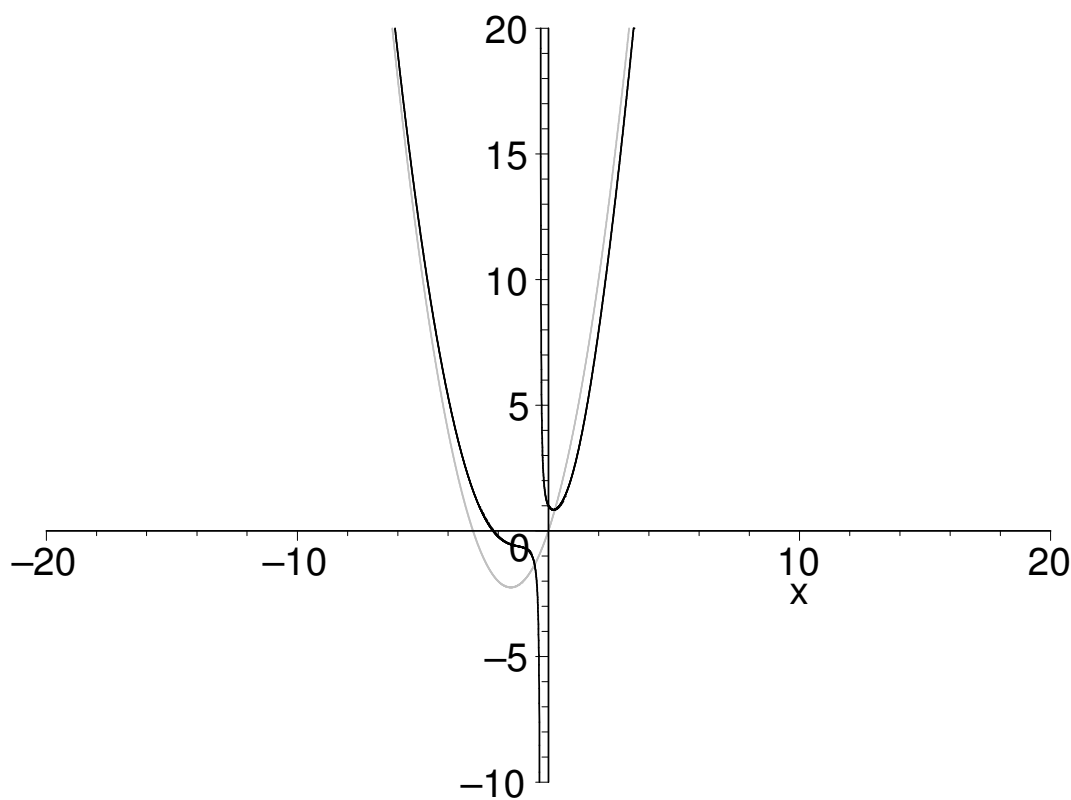
(a) Polynomdivision

$$\begin{array}{r} (x^5 + 3x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 1) : (x^3 + 3x + 1) = x^2 + 3x + \frac{-7x^2 - 2x + 1}{x^3 + 3x + 1} \\ - (x^5 + 3x^3 + x^2) \\ \hline 3x^4 + 2x^2 + x + 1 \\ - (3x^4 + 9x^2 + 3x) \\ \hline -7x^2 - 2x + 1 \end{array}$$

also

$$f(x) = x^2 + 3x + o(1)$$

Plot:



(b) Wir zeigen zunächst:

Für eine beliebige Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und $\beta < \alpha$ gilt:

$$g(x) = x^\alpha + O(x^\beta) \Leftrightarrow g^n(x) = x^{n\alpha} + O(x^{(n-1)\alpha+\beta})$$

Beweis: Es ist

$$g^n(x) - x^{n\alpha} = (g(x) - x^\alpha) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} (g(x))^{n-1-j} x^{j\alpha}}_{=:r(x)}$$

$\Rightarrow$: Nach Voraussetzung ist $g(x) - x^\alpha = O(x^\beta)$, insbes. $g(x) = O(x^\alpha)$ und damit $r(x) = O(x^{(n-1)\alpha})$. Insgesamt gilt dann $g^n(x) - x^{n\alpha} = O(x^{\beta+(n-1)\alpha})$.

$\Leftarrow$: Nach Voraussetzung ist $g^n(x) - x^{n\alpha} = O(x^{\beta+(n-1)\alpha})$, insbes. $g^n(x) = O(x^{n\alpha})$, also $g(x) = O(x^\alpha)$ und damit $r(x) = O(x^{(n-1)\alpha})$. Insgesamt gilt dann $g(x) - x^\alpha = O(x^\beta)$.

Sei nun $h(x) = \sqrt{x^7 + 1}$, also

$$h^2(x) = x^7 + 1 = x^7 + O(1) = x^{2\alpha} + O(x^{\alpha+\beta})$$

in obiger Formel, d.h.

$$h(x) = x^{\frac{7}{2}} + O(x^{-\frac{7}{2}})$$

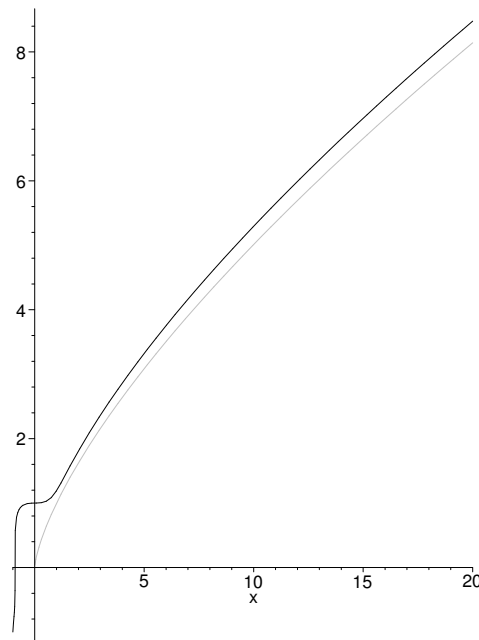
Weiter ist

$$f^5(x) = x^3 + \sqrt{x^7 + 1} = x^3 + h(x) = x^{\frac{7}{2}} + O(x^3) = x^{5\alpha} + O(x^{4\alpha+\beta})$$

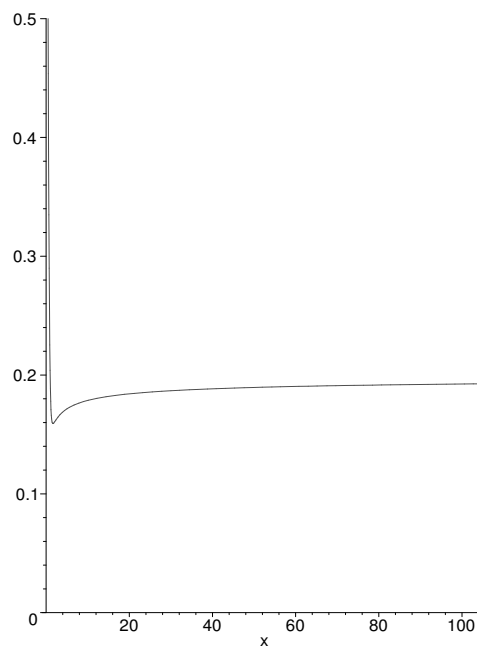
d.h.

$$f(x) = x^{\frac{7}{10}} + O(x^{3-\frac{28}{10}}) = x^{\frac{7}{10}} + O(x^{\frac{2}{10}})$$

Plot von $f(x)$ und $x^{\frac{7}{10}}$:



Plot von $\frac{f(x)-x^{\frac{7}{10}}}{x^{\frac{7}{10}}}$:



3. Bestimmen Sie $H'(x)$ für

$$H : \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$H(x) := \int_1^{x^2} t^{\frac{1}{3}} \ln(t) dt$$

Lösung:

Sei

$$F : \mathbb{R}_{\geq 1} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(y) := \int_1^y t^{\frac{1}{3}} \ln(t) dt$$

$t^{\frac{1}{3}} \ln(t)$ ist auf $\mathbb{R}_{\geq 1}$ stetig, also F differenzierbar und es gilt

$$F'(y) = y^{\frac{1}{3}} \ln(y)$$

Da $H(x) = F(x^2)$ ist

$$H'(x) = F'(x^2) \cdot 2x$$

$$= 2x^{\frac{5}{3}} \ln(x^2) = 4x^{\frac{5}{3}} \ln(x)$$

nach der Kettenregel.

4. Berechnen Sie für $b > 0$ folgendes Integral mittels Riemannscher Summen

$$\int_0^b e^x dx$$

Lösung:

Wir verwenden die äquidistanten Stützstellen $x_k = \frac{k \cdot b}{n}$, $k = 0, \dots, n$. Mit $q_n := e^{\frac{b}{n}}$ ist

$$f(x_k) = e^{\frac{k \cdot b}{n}} = q_n^k$$

und für die Riemannsche Summe gilt

$$\begin{aligned} \Sigma_n &:= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) (x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (q_n)^k \frac{b}{n} = \frac{b}{n} \frac{1 - (q_n)^n}{1 - q_n} \\ &= \frac{b}{n} \frac{1 - e^b}{1 - e^{\frac{b}{n}}} \end{aligned}$$

Da e^x Riemann-integrierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} \int_0^b e^x dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b}{n} \frac{1 - e^b}{1 - e^{\frac{b}{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^b - 1) \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} \\ &= (e^b - 1) \end{aligned}$$

denn mit der Regel von l'Hospital ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b}{n}}{e^{\frac{b}{n}} - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\frac{b}{n}}} = 1$.